

Diplôme d'Études Approfondies
en Astrophysique, Géophysique et Physique Spatiale

DYNAMIQUE STELLAIRE

R. Scufraire

Institut d'Astrophysique et de Géophysique
Université de Liège

Septembre 2003

Avertissement

Le cours intitulé *Dynamique stellaire* s'inscrit dans le groupe *Astrophysique galactique et extragalactique* des cours organisés à l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège dans le cadre du D.E.A. en Astrophysique, Géophysique et Physique Spatiale. Les présentes notes constituent le support du cours dispensé oralement et n'ont pas la prétention de couvrir le sujet de façon exhaustive et n'incluent pas les exercices des répétitions.

Le chapitre 1 introduit les concepts de base. Il est suivi d'une description de notre Galaxie (chapitres 2 à 4). Nous exposons ensuite la théorie du potentiel gravifique et ses applications aux différents cas de symétrie que présentent les systèmes stellaires (chapitres 5 à 8). Les chapitres 9 à 11 décrivent les orbites qui sont susceptibles d'exister dans un potentiel donné. Les matières exposées aux chapitres 12 à 15 reposent sur l'équation de Boltzmann sans collisions. Enfin, au chapitre 16, nous effleurons le problème de la stabilité des systèmes sans collisions.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Classification des galaxies	1
1.2	Amas stellaires	5
1.3	Fonction de distribution	6
1.4	Potentiel gravifique moyen	8
2	Description de la Galaxie	11
2.1	Repère fondamental, repère local	11
2.2	Le disque	13
2.3	La composante sphéroïdale	17
2.4	Le système d'amas globulaires	20
2.5	Formation de la Galaxie et populations stellaires	20
3	Cinématique du disque dans le voisinage solaire	25
3.1	Le mouvement du Soleil	25
3.2	Détermination du mouvement du repère local	26
3.3	Cinématique des étoiles dans le voisinage solaire	27
4	La rotation galactique	31
4.1	Rotation galactique dans le voisinage solaire et formules de Oort	32
4.2	Détermination de la courbe de rotation	34
5	Théorie du potentiel gravifique	37
5.1	Force et potentiel	37
5.2	Énergie gravifique	38
5.3	Le temps dynamique	39
5.4	Le théorème du viriel	40
5.5	Instabilité de Jeans dans un fluide	41

6	Potentiel des systèmes sphériques	43
6.1	Le point central massif	44
6.2	La sphère homogène	44
6.3	Potentiel isochrone	44
6.4	Potentiel de Hubble modifié	45
6.5	Profil de densité en loi de puissance	46
6.6	Modèle de Plummer	46
7	Potentiel des systèmes à symétrie de révolution	47
7.1	Disque de Kuzmin	47
7.2	Potentiel de Miyamoto et Nagai	48
7.3	Potentiel logarithmique	49
7.4	Systèmes sphéroïdaux	49
7.5	Potentiels des disques	50
7.6	Bref rappel sur les fonctions de Bessel	52
8	Modèles de masse de la Galaxie	55
8.1	Modèle de Caldwell et Ostriker (1981)	56
8.2	Modèle de Bahcall, Schmidt et Soneira (1982)	57
9	Orbites dans un potentiel à symétrie sphérique	61
9.1	Orbites circulaires	64
10	Orbites dans un potentiel à symétrie de révolution	67
10.1	Intégrales premières, surface de section	68
10.2	Mouvements épicycliques	69
11	Orbites dans un potentiel plan dépourvu de symétrie de révolution	73
11.1	Potentiel logarithmique	73
11.2	Potentiel tournant	74
11.3	Barre galactique	77
12	L'équation de Boltzmann sans collisions	81
12.1	Collisions stellaires	81
12.2	Temps de relaxation	83
12.3	L'équation de Boltzmann sans collisions	84

12.4	Le théorème de Jeans	85
12.4.1	Système ne possédant aucune symétrie	86
12.4.2	Système à symétrie de révolution	86
12.4.3	Système à symétrie de révolution et potentiel séparable	87
12.4.4	Système à symétrie sphérique	87
13	Équilibre des systèmes à symétrie sphérique sans collisions	89
13.1	Modèles polytropiques	90
13.2	Modèle isotherme	93
13.3	Modèles de King	94
13.4	Profil de densité arbitrairement donné	98
13.5	Modèles avec $f = f(E, L)$	99
13.6	Bref rappel sur les fonctions eulériennes et l'équation d'Abel	100
14	Équilibre des disques sans collisions	101
15	Hydrodynamique stellaire	103
15.1	Coordonnées cylindriques	104
15.2	Coordonnées sphériques	106
16	Stabilité des systèmes sans collisions	109
16.1	L'instabilité de Jeans	109
16.2	Stabilité des systèmes sphériques	110
16.3	La structure spirale	113
A	Constantes et relations utiles	119
A.1	Constantes	119
A.2	Les coordonnées cylindriques	119
A.3	Les coordonnées sphériques	121

Chapitre 1

Introduction

Un système stellaire est un ensemble d'étoiles liées gravitationnellement. Les amas stellaires comptent d'une centaine à un million d'étoiles, les galaxies en contiennent de 10^{10} à 10^{12} . Le comportement de ces systèmes est déterminé par les lois de la mécanique newtonienne et la théorie newtonienne de la gravitation. Il n'y a actuellement pas d'indication que des effets relativistes puissent être importants, sauf peut-être au centre de certaines galaxies. L'étude de la dynamique des systèmes stellaires constitue la dynamique stellaire.

1.1 Classification des galaxies

Le premier système de classification des galaxies fut introduit par Hubble en 1925 d'après les aspects de leurs images. Les galaxies peuvent être réparties en trois grandes classes : elliptiques, spirales et irrégulières. On est amené à subdiviser les galaxies spirales en spirales normales et en spirales barrées et à introduire la classe des galaxies lenticulaires, intermédiaires entre les elliptiques et les spirales. Divers raffinements de cette classification ont été proposés, nous ne les décrivons pas.

Le tableau ci-dessous donne la fréquence des différents types de galaxies.

E	S0	S	Irr	objets particuliers
0,13	0,21	0,61	0,03	0,02

Galaxies elliptiques

Les galaxies elliptiques ont une structure très régulière, avec une intensité lumineuse qui décroît régulièrement à partir des régions centrales. Leur forme apparente elliptique peut aller du cercle E0 à une forme allongée E7. Dans la notation En , n est lié au rapport des axes a et b de l'ellipse par $n = 10(a - b)/a$. La forme de l'image ne suffit évidemment pas à reconstruire la forme tridimensionnelle. Il est possible que certaines galaxies elliptiques ne soient pas des sphéroïdes aplatis comme on le supposait autrefois mais aient une forme ellipsoïdale à 3 axes inégaux. La décroissance de la brillance dans l'image à partir du centre est souvent décrite par la loi de de Vaucouleurs, appelée souvent loi en $R^{1/4}$,

$$I(R) = I(0)e^{-kR^{1/4}} = I_e e^{-7,67[(R/R_e)^{1/4} - 1]},$$

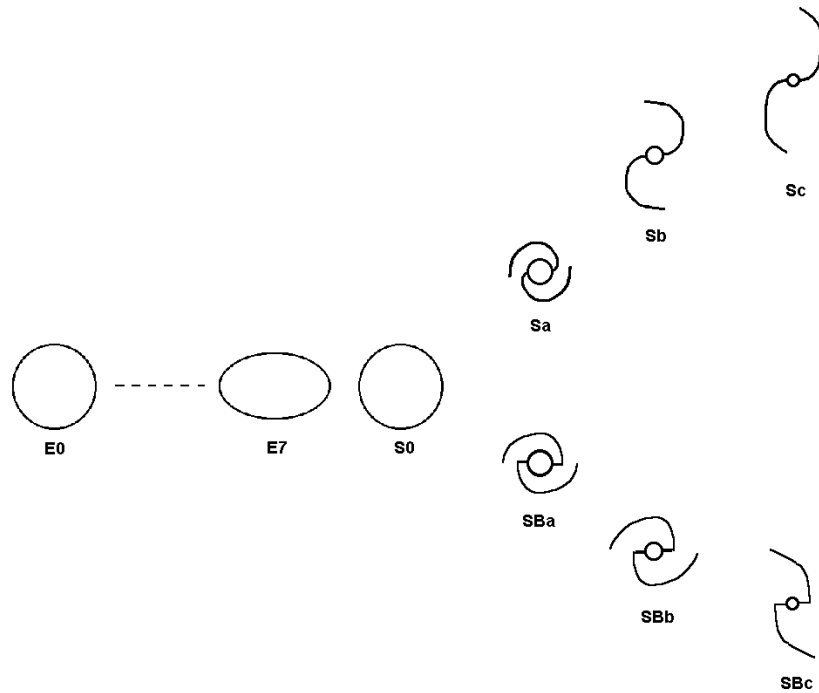


FIG. 1.1 – Schéma de la classification de Hubble (à l'exception des irrégulières).

où le rayon effectif R_e est le rayon de l'isophote à l'intérieur de laquelle l'image contient la moitié de la luminosité totale. Elle est aussi parfois approximée par la loi de Hubble-Reynolds

$$I(R) = \frac{I_0}{(1 + R/R_H)^2}$$

ou par la loi de Hubble modifiée

$$I(R) = \frac{I_0}{1 + (R/R_H)^2}.$$

Les galaxies elliptiques contiennent des étoiles vieilles, pauvres en métaux ne présentant pas de mouvement de rotation d'ensemble. On y voit souvent des amas globulaires mais peu ou pas de gaz, de poussières ou d'étoiles jeunes. On dit que les galaxies elliptiques sont des systèmes de population II.

Galaxies spirales

Les images de galaxies spirales montrent des bras spiraux nettement visibles quand leur disque est perpendiculaire à la ligne de visée. Vues de profil, elles montrent un bulbe central sphéroïdal et un disque plat. Les bras spiraux émergent du noyau central approximativement sphérique dans les spirales normales (S) ou prennent naissance aux extrémités d'une barre centrale constituée par le noyau allongé dans les spirales barrées (SB). On utilise les lettres a, b et c pour indiquer l'importance du bulbe central (décroissante de a à

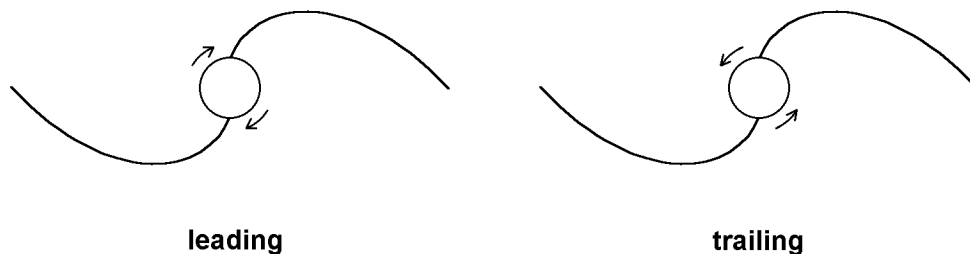


FIG. 1.2 – Spirales de types *leading* et *trailing*.

c) et l'aspect de la spirale (serrée pour le type a, plus lâche pour le type c). La distribution de brillance dans le disque est souvent décrite par une loi exponentielle de la forme

$$I(R) = I_0 e^{-R/R_d}.$$

Dans une galaxie spirale, les étoiles du disque ont un mouvement d'ensemble de rotation autour du centre. On désigne par $v_c(R)$ la vitesse circulaire en fonction de la distance au centre galactique. Dans la plupart des galaxies spirales, cette fonction est relativement constante, sauf au voisinage du centre où v_c s'annule. Les valeurs typiques de v_c sont comprises entre 200 et 300 km s⁻¹. Les étoiles du disque sont des étoiles de tous âges, généralement plus riches en métaux que les étoiles de population II. Les bras spiraux sont particulièrement riches en étoiles jeunes et brillantes de métallicité élevée. On trouve également dans le disque du gaz et des poussières qui participent au mouvement général de rotation. On dit d'un tel système qu'il est de population I. Contrairement au disque, le bulbe central (également appelé sphéroïde) est composé d'étoiles de population II.

Il y a une corrélation entre la structure spirale et d'autres propriétés globales des galaxies telles que la luminosité relative du sphéroïde et la fraction de masse que représente le gaz interstellaire. Les spirales avec les bulbes les plus massifs présentent des bras plus serrés et contiennent moins de gaz. Les photographies de galaxies spirales sont dominées par la lumière bleue d'étoiles jeunes et lumineuses des types O et B et des régions H II qui matérialisent les bras. Des observations dans la raie à 21 cm de l'hydrogène neutre montrent que celui-ci est également localisé dans les bras. L'examen en lumière rouge, qui met mieux en évidence l'émission des vieilles étoiles du disque montre également les bras spiraux, mais ils sont plus larges et d'amplitude plus faible.

La plupart des galaxies spirales présentent deux bras, mais ils peuvent montrer des ramifications.

On dit qu'une structure spirale est de type *leading* ou *trailing* (en français, on utilise parfois les termes précédente ou traînante pour qualifier la spirale) selon le sens d'enroulement des bras comparé au sens de la rotation galactique (voir figure 1.2). Pour distinguer le type de spirale, il faut pouvoir reconnaître quelle partie de la galaxie est la plus proche de l'observateur (voir figure 1.3). Dans tous les cas où on peut déterminer le type de

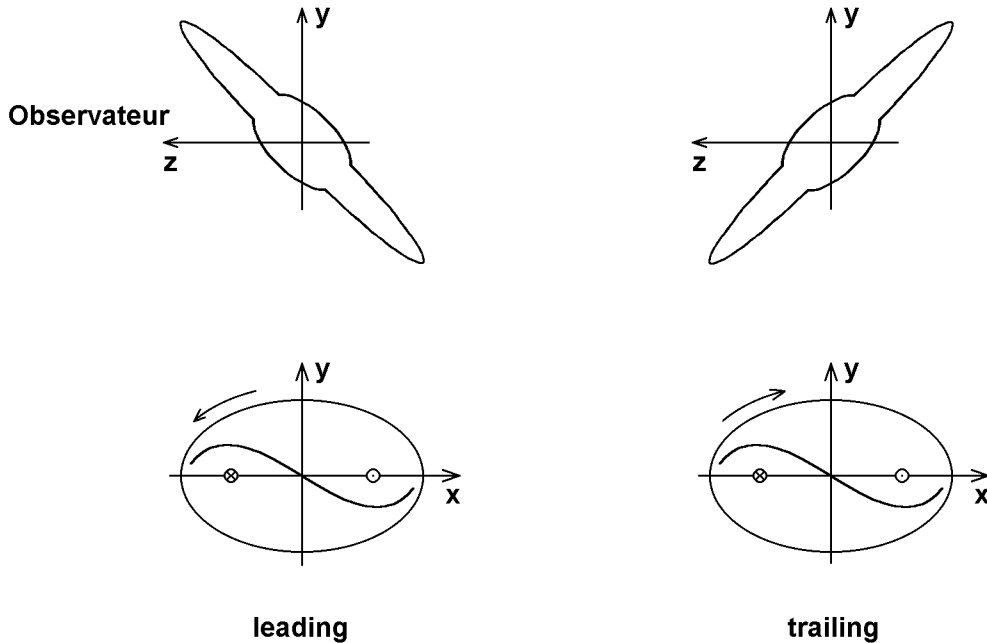


FIG. 1.3 – Les spirales de types *leading* et *trailing* apparaissent de la même façon à l'observateur.

spirale de façon non ambiguë, il s'agit d'une spirale de type *trailing*. C'est aussi le cas de notre Galaxie. On peut donc raisonnablement supposer que toutes les spirales sont de type *trailing*.

Les bras spiraux ne peuvent pas être constitués en permanence de la même matière (étoile, gaz) car une telle structure serait détruite en quelques centaines de millions d'années par suite de la rotation différentielle. La structure spirale est due à une onde de densité qui se propage à vitesse angulaire constante, différente de la vitesse angulaire de rotation du disque matériel (celle-ci varie avec la distance galactocentrique). Bien que ce soient les étoiles qui contribuent pour la majeure part au potentiel gravifique, c'est le gaz qui répond le mieux à la perturbation créée par cette onde de densité. Cela provient de la plus faible dispersion des vitesses du gaz. Lorsque le gaz rencontre l'onde spirale (il entre dans le bras par le bord concave), il y est comprimé. Cette compression peut déclencher des instabilités gravitationnelles et la contraction des nuages qui en résulte conduit à la formation d'étoiles. Ultérieurement, le gaz qui ne s'est pas transformé en étoiles subit une expansion en ressortant du bras de spirale par le bord convexe. Les étoiles les plus massives et les plus brillantes ainsi formées vivent assez peu de temps de sorte qu'elles sont « éteintes » au moment où elles quittent le bras de spirale.

Galaxies lenticulaires

Comme les galaxies spirales, les galaxies lenticulaires (S0) possèdent un disque important dont la luminosité suit une loi de décroissance exponentielle. Mais celui-ci ne contient pas d'objet de population I (gaz, poussière, étoiles jeunes et brillantes) et ne présente

pas de bras spiraux. Elles sont, comme les galaxies elliptiques, composées d'objets de population II. Elles font la transition entre les galaxies elliptiques (E7) et les galaxies spirales.

On notera que les galaxies lenticulaires se distinguent des spirales par l'absence de structure spirale mais également par l'absence de gaz interstellaire. Dans les galaxies spirales, bien que le disque dans sa totalité concoure à l'existence de la structure spirale, il semble donc que le gaz interstellaire soit un ingrédient essentiel.

Galaxies irrégulières

Les galaxies irrégulières (Irr) n'ont pas de structure ni de forme géométrique bien définies. On y trouve beaucoup de poussières, d'étoiles très bleues et de nébuleuses brillantes (population I). Les deux galaxies satellites de notre Galaxie, les nuages de Magellan, appartiennent à cette classe.

La classification de Hubble ne doit pas être interprétée comme une séquence d'évolution. On pense que les différences morphologiques entre galaxies représentent des différences dans leurs conditions de formation.

Exercice

Déterminez la distribution volumique d'émissivité d'un système stellaire à symétrie sphérique à partir de la distribution de brillance dans l'image. Le problème se réduit à la résolution d'une équation d'Abel.

1.2 Amas stellaires

Une galaxie typique contient une multitude de petits systèmes stellaires contenant d'une centaine à un million d'étoiles. Ces systèmes sont appelés amas et on en distingue deux types, les amas ouverts (ou amas galactiques) et les amas globulaires.

Les amas ouverts sont des systèmes de population I qu'on trouve dans le disque galactique. Ils contiennent d'une centaine à un millier d'étoiles et ont des rayons de 1 à 10 pc. Ils sont formés continuellement et la plupart ont des âges inférieurs à 10^8 ans. Il semble qu'ils soient progressivement disloqués par les perturbations gravitationnelles des nuages de gaz interstellaire. Un millier d'amas ouverts sont connus dans notre Galaxie, qui devrait en contenir 10^5 .

Les amas globulaires sont des systèmes de population II contenant de 10^4 à 10^6 étoiles. Leurs rayons sont typiquement de 20 à 50 pc. Notre Galaxie contient environ 200 amas globulaires, répartis avec une symétrie sphérique et concentrés vers le centre galactique. Ils ne contiennent pas de gaz, ni de poussière, ni d'étoiles jeunes. Les amas globulaires sont sphériques et dynamiquement stables. Ils sont généralement très âgés et seraient des reliques de la formation de la Galaxie. La densité au centre de ces amas peut atteindre des valeurs élevées (de l'ordre de $10^4 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3}$, à comparer à $0,1 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3}$ au voisinage du Soleil).

1.3 Fonction de distribution

Pour l'étude de leurs mouvements dans une galaxie, les étoiles sont assimilées à des points matériels sans étendue. Cette approximation est justifiée, sauf dans les régions les plus denses d'une galaxie, par l'énorme rapport entre la séparation moyenne des étoiles et leur rayon moyen. Ainsi, l'étoile la plus proche du Soleil, Proxima Centauri, est à 4,22 années-lumière alors que le rayon solaire est de $6,96 \cdot 10^5$ km, soit un rapport de $1,75 \cdot 10^{-8}$. Beaucoup d'étoiles sont membres de systèmes binaires ou de systèmes multiples. Dans ce cas, c'est la séparation entre les composantes du système multiple qui devrait être comparée à la distance des systèmes voisins. Dans beaucoup de cas, cette comparaison justifie que les systèmes multiples soient assimilés à des points matériels.

Une galaxie de taille moyenne contient de l'ordre de 10^{11} étoiles. Il convient donc d'adopter une approche statistique pour l'étude d'un tel système. On définit la distribution des étoiles dans un système stellaire à l'aide d'une fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ telle que $f(\vec{r}, \vec{v}, t) \overrightarrow{dr} \overrightarrow{dv}$ soit égal au nombre d'étoiles dans un *petit* cube de côtés dx_1, dx_2, dx_3 situé au point de vecteur position \vec{r} et dont les vitesses sont dans un *petit* cube de l'espace des vitesses de côtés dv_1, dv_2, dv_3 situé en un point repéré par le vecteur \vec{v} (\overrightarrow{dr} et \overrightarrow{dv} sont des abréviations de $dx_1 dx_2 dx_3$ et $dv_1 dv_2 dv_3$ respectivement). Cette définition appelle la remarque suivante. L'égalité entre $f \overrightarrow{dr} \overrightarrow{dv}$ et un nombre d'étoiles ne peut être qu'approximative (ne serait-ce que parce qu'un nombre d'étoiles est un entier) et nécessite que $\overrightarrow{dr} \overrightarrow{dv}$ soit suffisamment grand pour contenir un assez grand nombre d'étoiles tout en restant petit par rapport aux dimensions caractéristiques du système stellaire considéré. On notera que f est une densité dans l'espace des phases.

En fait, les étoiles diffèrent par un certain nombre de caractères physiques tels que leur masse, leur âge, leur composition chimique, leur type spectral. On est donc souvent amené à constituer différents groupes d'étoiles en fonction de ces critères. Ces groupes possèdent des fonctions de distribution distinctes. La description d'un système stellaire nécessitera généralement la donnée de plusieurs fonctions de distributions f_1, f_2, \dots, f_n . Dans ce qui suit, nous n'utiliserons qu'une seule fonction de distribution, sauf quand l'introduction explicite de plusieurs s'avérera nécessaire.

La densité d'étoiles $\nu(\vec{r}, t)$ est évidemment donnée par

$$\nu(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}.$$

On définit une vitesse moyenne $\bar{\nu}(\vec{r}, t)$ à partir des moments d'ordre 1 de la fonction de distribution,

$$\bar{\nu}_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\nu} \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) v_i d\vec{v}.$$

D'autres valeurs moyennes peuvent être définies de cette façon. Le tenseur des dispersions des vitesses sera particulièrement intéressant par la suite. Nous le noterons σ^2 . Il ne faut évidemment pas interpréter cette notation comme le carré d'un tenseur σ !

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)}.$$

Il est facile de vérifier que si u désigne un axe de direction quelconque, la dispersion des vitesses dans la direction u est donnée par

$$\sigma_u^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2 \alpha_i \alpha_j,$$

où les α_i sont les cosinus directeurs de l'axe u dans les axes x_i . En particulier, la dispersion σ_i de la composante v_i est donnée par

$$\sigma_i^2 = \sigma_{ii}^2.$$

Le tenseur σ^2 est manifestement symétrique, il existe donc un système d'axes cartésiens dans lequel il est diagonal. Dans ces axes particuliers, on a

$$\sigma_u^2 = \sum_i \sigma_i^2 \alpha_i^2.$$

L'observation montre que la distribution des vitesses résiduelles, $v_i - \bar{v}_i$, est relativement bien décrite par une gaussienne. Dans le système d'axes qui diagonalise σ^2 , la fonction de distribution s'écrit donc sous la forme approximative suivante appelée distribution de Schwarzschild

$$f = \frac{\nu}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} e^{-\left(\frac{(v_1 - \bar{v}_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(v_2 - \bar{v}_2)^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(v_3 - \bar{v}_3)^2}{2\sigma_3^2} \right)}.$$

On se réfère souvent à cette distribution des vitesses sous le nom de distribution ellipsoïdale des vitesses, car, dans l'espace des vitesses, les surfaces d'égale densité sont les ellipsoïdes homothétiques

$$\frac{(v_1 - \bar{v}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(v_2 - \bar{v}_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(v_3 - \bar{v}_3)^2}{\sigma_3^2} = \text{cte}.$$

L'ellipsoïde pour lequel la constante du second membre vaut 1 est appelé ellipsoïde des vitesses.

Dans certains cas, il est commode d'utiliser une fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ telle que $f \vec{dr} \vec{dv}$ soit la masse totale des étoiles dont le vecteur position est dans le cube \vec{dr} repéré par \vec{r} et la vitesse dans le cube \vec{dv} repéré par \vec{v} . Dans ce cas la densité (de masse) $\rho(\vec{r}, t)$ est donnée par

$$\rho(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) \vec{dv}.$$

Les autres relations seront modifiées en y remplaçant ν par ρ .

On transpose sans difficulté les notions développées ci-dessus aux données d'observation d'un échantillon de N étoiles. Si on désigne par P_α et \vec{v}_α leurs positions et leurs vitesses dans un certain repère, on définit le centroïde C du groupe par

$$\vec{OC} = \frac{1}{N} \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha.$$

La vitesse moyenne $\bar{\vec{v}}$ est aussi la vitesse du centroïde,

$$\bar{\vec{v}} = \frac{1}{N} \sum \vec{v}_\alpha.$$

On définit les vitesses résiduelles \vec{v}'_α et le tenseur de dispersion des vitesses par

$$\vec{v}'_\alpha = \vec{v}_\alpha - \bar{\vec{v}} \quad \text{et} \quad \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{N} \sum v'_{\alpha i} v'_{\alpha j}.$$

1.4 Potentiel gravifique moyen

Il y a une différence fondamentale entre les galaxies et les systèmes habituellement étudiés en mécanique statistique, par exemple un gaz. Les forces s'exerçant entre les molécules d'un gaz ont une portée très courte et, en dehors des brefs instants où une molécule heurte une de ses voisines, ces forces peuvent être négligées. Au contraire, les forces de gravitation qui agissent sur les étoiles d'une galaxie décroissent lentement comme $1/r^2$. Or dans une région où la densité stellaire est uniforme, le nombre d'étoiles situées à la distance r croît comme r^2 . Il en résulte qu'une étoile dans une galaxie éprouve à chaque instant la gravitation de l'ensemble de la galaxie et pas seulement les forces exercées par ses plus proches voisines. Il est habituel, en dynamique stellaire, de considérer qu'une étoile se meut dans un potentiel gravifique moyen résultant d'une répartition continue de la masse dans le système stellaire. Cette façon de négliger le caractère individuel des interactions gravifiques au profit d'un traitement collectif est justifié par le calcul du temps de relaxation (le temps de relaxation est le temps nécessaire pour que le mouvement réel d'une étoile diffère significativement de celui qu'elle aurait dans le potentiel moyen). On le trouve en général très long et, pour beaucoup de systèmes, supérieur à leur âge.

Une galaxie peut contenir de la masse sous une forme non stellaire (gaz, poussières, ...). En ce qui concerne l'étude du mouvement des étoiles, il suffit d'ajouter le champ de gravitation créé par ces composantes au champ de gravitation créé par la composante stellaire. Dans notre Galaxie, le gaz ne représente qu'une faible fraction (quelque 5 pour cent) de la masse des étoiles et n'exerce que peu d'influence sur la dynamique galactique.

Références

L'ouvrage classique de Mihalas et Binney (1981) est à présent vieilli, le livre de Binney et Merrifield (1998) le remplace fort heureusement. On y trouvera une description de la structure et de la cinématique des galaxies et plus particulièrement de notre Galaxie. On se reportera au livre de Binney et Tremaine (1987) pour les développements théoriques. Mentionnons également l'ouvrage de Combes, Boissé, Mazure et Blanchard (1991), rédigé en français, et celui de Bertin (2000). L'étude de la dynamique et de l'évolution des amas globulaires ne sera pas ou peu abordée dans ce cours. Nous suggérons la lecture des travaux de Spitzer (1987) et de Meylan et Heggie (1997) sur ce sujet.

Bertin G., 2000. Dynamics of galaxies. Cambridge University Press.

- Binney J., Merrifield M., 1998. Galactic astronomy. Princeton University Press.
- Binney J., Tremaine S., 1987. Galactic dynamics. Princeton University Press.
- Combes F., Boissé P., Mazure A., Blanchard A., 1991. Galaxies et cosmologie. InterÉditions, Éditions du CNRS.
- Meylan G., Heggie D.C., 1997. Internal dynamics of globular clusters. *Astron Astrophys Rev*, 8, 1.
- Mihalas D., Binney J., 1981. Galactic astronomy. Freeman.
- Spitzer L., 1987. Dynamical evolution of globular clusters. Princeton University Press.

Chapitre 2

Description de la Galaxie

Notre position dans la Galaxie n'est pas des plus confortables pour la classer dans le schéma décrit au chapitre précédent. Les observations montrent toutefois que notre Galaxie est une spirale de type intermédiaire entre Sb et Sc (qu'on note Sbc) et suggèrent qu'elle posséderait une petite barre centrale.

2.1 Repère fondamental, repère local

Pour décrire les mouvements stellaires dans une galaxie axisymétrique, il est commode d'utiliser les coordonnées cylindriques R , ϕ et z . L'origine du système sera choisie au centre de la galaxie et on prendra l'axe de symétrie comme axe z . Le plan galactique (également un élément de symétrie) coïncidera avec le plan (x, y) . Ce système de coordonnées n'est pas entraîné par la rotation galactique, c'est un système d'inertie (figure 2.1). On l'appelle repère fondamental (*fundamental standard of rest*). En chaque point P , les vecteurs unitaires \vec{e}_R , \vec{e}_ϕ , \vec{e}_z , tangents aux lignes de coordonnées, définissent un repère cartésien dans lequel on repèrera souvent les vitesses stellaires. Ainsi la vitesse \vec{v} d'une étoile située en P s'écrira $\vec{v} = v_R \vec{e}_R + v_\phi \vec{e}_\phi + v_z \vec{e}_z$.

Dans le cas de notre Galaxie, le pôle nord galactique définira le sens de l'axe z . Il résulte de ce choix que notre Galaxie tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Afin d'avoir la composante v_ϕ de la rotation galactique positive, on adopte un système d'axes orienté à gauche. On choisit en outre la direction de l'axe x dans la direction de la position *actuelle* du Soleil (figure 2.2). Le repère cartésien local est également orienté à gauche. Il en résulte un changement de signes dans les expressions donnant les composantes du produit vectoriel (calcul du moment cinétique). Toutefois ce changement de signes est sans conséquence et sera ignoré dans ce qui suit. A la position du Soleil, les vecteurs du repère local ont les directions suivantes (la figure 2.3 rappelle la définition des coordonnées galactiques) :

\vec{e}_R dans la direction $\ell = 180^\circ$, $b = 0^\circ$,
 \vec{e}_ϕ dans la direction $\ell = 90^\circ$, $b = 0^\circ$,
 \vec{e}_z dans la direction $b = 90^\circ$.

Nous verrons plus loin que par tout point du disque galactique passe une orbite circulaire caractérisée par une vitesse de parcours dépendant de son rayon et que nous noterons

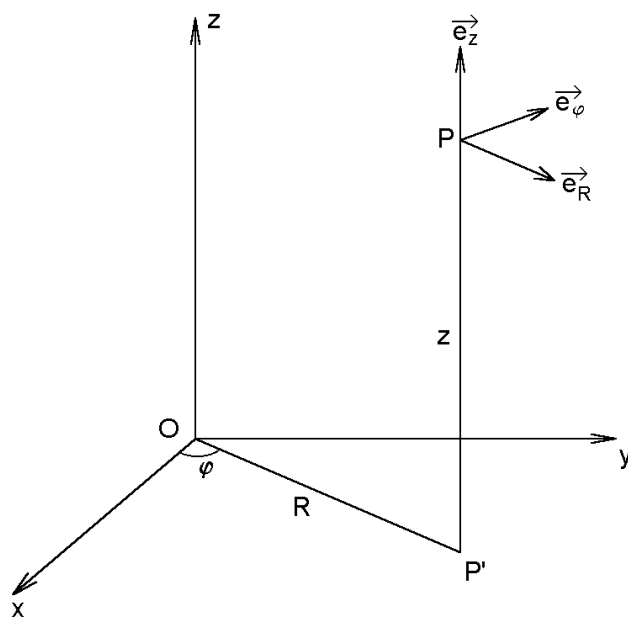


FIG. 2.1 – Coordonnées cylindriques.

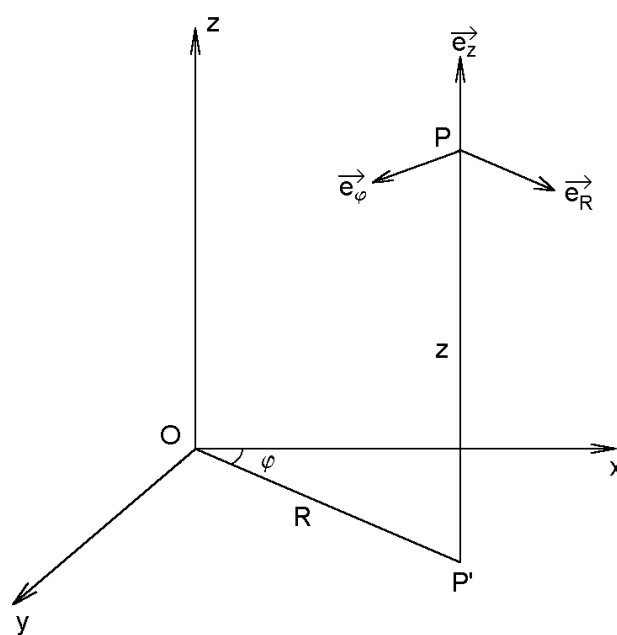


FIG. 2.2 – Coordonnées cylindriques utilisées pour notre Galaxie.

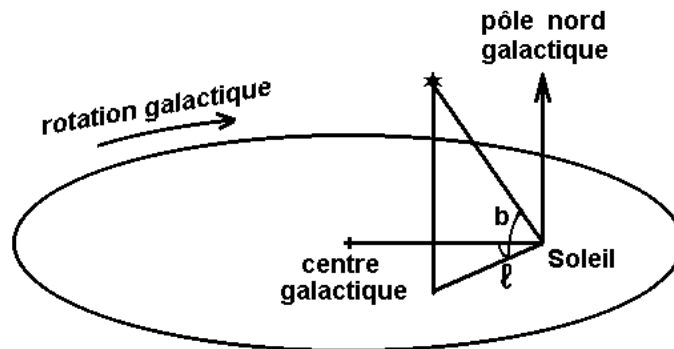


FIG. 2.3 – Rappel des coordonnées galactiques ℓ (longitude galactique) et b (latitude galactique).

$v_c(R)$. Pour étudier les étoiles au voisinage d'un point P , on utilise souvent un repère local (*local standard of rest*) constitué des vecteurs \vec{e}_R , \vec{e}_ϕ et \vec{e}_z , animé d'une vitesse $v_c(R)\vec{e}_\phi$ par rapport au repère fondamental. Si on désigne par \vec{v} la vitesse d'une étoile dans le repère fondamental et par \vec{v}' sa vitesse dans le repère local, les composantes R et z sont les mêmes et pour la composante ϕ on a $v'_\phi = v_\phi - v_c(R)$.

Dans certaines circonstances (par exemple pour décrire la composante sphéroïdale de la Galaxie ou un amas globulaire), l'usage des coordonnées sphériques r , θ , ϕ est plus indiqué. La figure 2.4 rappelle leur définition et montre le repère local défini en chaque point P par les vecteurs unitaires \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_ϕ . Si cela s'avère commode, on peut comme ci-dessus, changer le sens dans lequel on compte positivement la coordonnée azimutale ϕ .

2.2 Le disque

Le disque de notre Galaxie est une structure aplatie possédant un plan de symétrie (le plan galactique) et une symétrie axiale approximative. Le Soleil est situé dans le plan galactique (à une dizaine de pc au-dessus du plan de symétrie) et à une distance R_0 du centre galactique d'environ $8,5 \pm 1$ kpc. Nous ne pouvons observer la Galaxie que par la tranche (elle apparaît sur le ciel nocturne comme une traînée blanchâtre, la Voie lactée) et les observations dans le plan galactique sont considérablement gênées par la poussière interstellaire.

La structure du disque est proche de l'équilibre rotationnel. La plupart des étoiles s'y déplacent sur des orbites approximativement circulaires. La figure 2.5 montre l'allure de $v_c(R)$. Au niveau du soleil on a $v_0 \equiv v_c(R_0) = 220 \pm 15 \text{ km s}^{-1}$ et les composantes de la dispersion des vitesses sont $(\sigma_R, \sigma_\phi, \sigma_z) \approx (40, 25, 20) \text{ km s}^{-1}$. Le courant asymétrique est de l'ordre de 15 km s^{-1} .

La densité dans le disque ne peut pas être mesurée directement. Cependant l'observation d'autres galaxies spirales et les comptages d'étoiles dans la direction des pôles galactiques

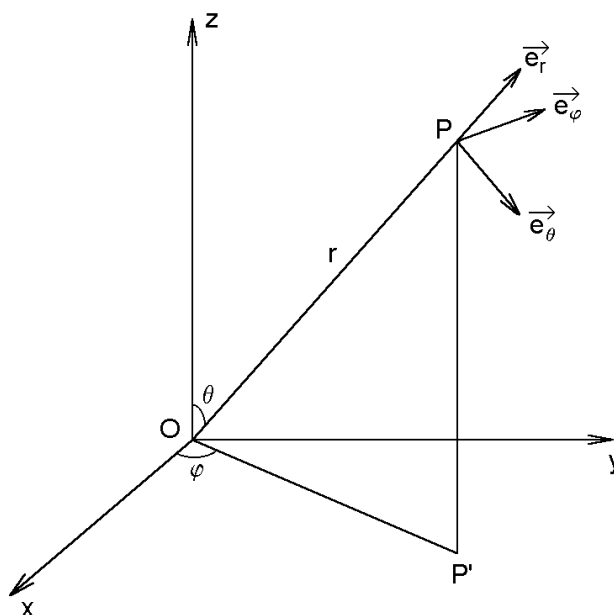


FIG. 2.4 – Coordonnées sphériques.

suggèrent une loi de la forme

$$\nu(R, z) \propto e^{-\frac{R}{h_R} - \frac{|z|}{h_z}},$$

avec h_R compris entre 2 et 3 kpc (Porcel et al., 1998, Dehnen, Binney, 1998) et h_z entre 300 et 350 pc. On utilise souvent un facteur $\text{sech}^2(z/h'_z)$ pour modéliser la distribution verticale, il a l'avantage de ne pas présenter de singularité en $z = 0$.

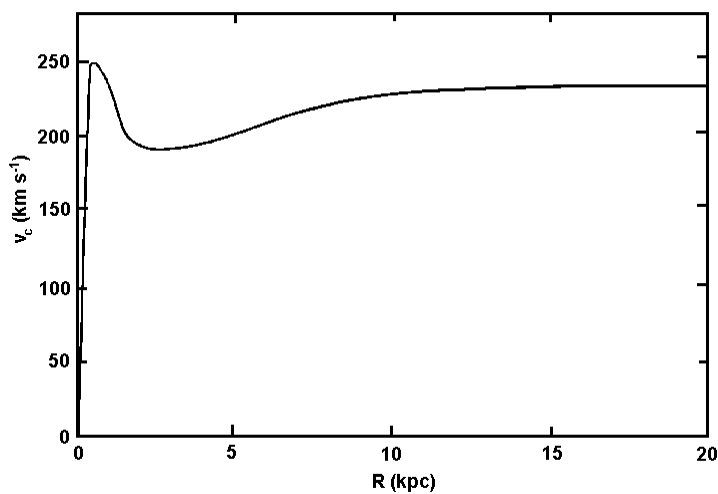


FIG. 2.5 – La courbe de rotation galactique (schématiquement).

En fait, la distribution verticale dépend du type d'étoiles. Si on définit une épaisseur caractéristique par le rapport entre la densité superficielle et la densité volumique dans le plan galactique, cette épaisseur est d'environ 200 pc pour les étoiles des types spectraux O et B (étoiles jeunes et massives) et d'environ 700 pc pour les étoiles de type G (le Soleil est de type G2).

L'observation des étoiles et de la matière interstellaire permet d'estimer à $0,085 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$ la densité dans le voisinage solaire, en parfait accord avec les études dynamiques basées sur les données recueillies par la mission Hipparcos (Crézé et al. 1998 obtiennent $0,076 \pm 0,015 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$). La densité superficielle (ou densité de colonne) serait de l'ordre de $40 M_{\odot} \text{ pc}^{-2}$, mais cette valeur dépend du modèle utilisé.

Les mesures de σ_R dans notre Galaxie montrent que sa variation en fonction de R peut être décrite par la loi

$$\sigma_R(R) \propto e^{-R/2h_R}.$$

Des considérations sur l'équilibre vertical du disque indiquent que $\sigma_z \propto e^{-R/2h_R}$. Il en résulterait que σ_R/σ_z serait relativement constant dans le disque.

Les étoiles du disque sont d'âges, de métallicités et de propriétés cinématiques variées. Les étoiles les plus vieilles seraient presque aussi vieilles que celles des amas globulaires. Rappelons que la métallicité d'une étoile est mesurée relativement à la métallicité solaire par le coefficient $[\text{Fe}/\text{H}]$ défini par

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \left\{ \log \frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} \right\}_* - \left\{ \log \frac{n_{\text{Fe}}}{n_{\text{H}}} \right\}_{\odot}$$

Les étoiles du disque présentent une métallicité $[\text{Fe}/\text{H}]$ comprise entre $-0,5$ et $0,1$. On observe une corrélation entre l'âge des étoiles et leurs propriétés chimiques et cinématiques. Les étoiles les plus vieilles ont les valeurs de $[\text{Fe}/\text{H}]$ les plus faibles et les dispersions des vitesses les plus élevées (et présentent donc une plus grande hauteur d'échelle).

Diverses études montrent que le taux de formation d'étoiles dans le disque a été relativement constant tout au long de son histoire. La plupart des étoiles du disque ont donc des âges supérieurs à quelques milliards d'années. Dans le voisinage solaire, les étoiles les plus jeunes (moins d'un milliard d'années) ne sont pas encore bien mélangées.

Le disque épais

Le disque que nous avons décrit ci-dessus est ce qu'on appelle le disque mince. Dans les galaxies spirales qu'on peut observer par la tranche et qui ne présentent qu'un bulbe de taille négligeable, on n'observe qu'un disque mince. Par contre, lorsqu'un bulbe est présent, les profils montrent l'existence d'une seconde composante du disque, plus étendue, qu'on appelle le disque épais. Est-il nécessaire d'inclure un disque épais pour décrire correctement notre Galaxie? La question n'a peut-être pas encore reçu de réponse définitive.

La densité locale du disque épais est si faible qu'on ne peut pas l'étudier à partir d'observations d'étoiles proches. Sa hauteur d'échelle étant d'environ 1 kpc, il est préférable d'utiliser des étoiles de $z > 2$ kpc. Un $\sigma_z \approx 40 \text{ km s}^{-1}$ est caractéristique de cette population à une distance du centre galactique égale à celle du Soleil. Dans sa structure

verticale, le disque épais est intermédiaire entre le disque mince ($\sigma_z \approx 20 \text{ km s}^{-1}$) et le halo ($\sigma_z \approx 75 \text{ km s}^{-1}$). σ_R serait de l'ordre de 70 km s^{-1} et le courant asymétrique de 30 à 40 km s^{-1} .

	σ_R km s ⁻¹	σ_ϕ km s ⁻¹	σ_z km s ⁻¹	cour. asym. km s ⁻¹	h_z pc
disque mince	40	25	20	15	350
disque épais	70	50	40	30-40	1000

Le milieu interstellaire

La matière interstellaire forme une couche mince dont l'épaisseur croît de 30 pc dans les régions centrales à 200 pc dans le voisinage solaire. Sa masse ne représente qu'environ 5 % de la masse des étoiles visibles. L'existence de vastes nuages de gaz et de poussières dans le milieu interstellaire est connue depuis longtemps par l'obscurcissement et le rougissement de la lumière des étoiles qu'ils provoquent. Le principal composant de ces nuages est l'hydrogène. Il peut se présenter sous forme moléculaire H₂, sous forme atomique neutre H I et sous forme ionisée H II.

On rencontre la forme moléculaire dans les nuages moléculaires denses, dans lesquels de nombreuses molécules ont été détectées. L'existence de ces nuages est restée longtemps insoupçonnée. On peut repérer H₂ directement par son émission dans l'ultraviolet et indirectement par l'excitation collisionnelle des molécules de monoxyde de carbone, dont on détecte l'émission en ondes millimétriques (à 2,6 mm). Les nuages moléculaires denses ($T \approx 20 \text{ K}$, $n > 10^3 \text{ cm}^{-3}$) sont les lieux de formation des étoiles et, à ce titre, ils jouent un rôle important sur l'évolution à long terme de la Galaxie. Ils contiennent une fraction appréciable de la masse du milieu interstellaire galactique tout en occupant une faible fraction du volume (moins de 1 %).

L'hydrogène atomique neutre est observé en ondes radio, par son émission à 21 cm (transition hyperfine). Une composante froide ($T \approx 100 \text{ K}$) est distribuée en nuages relativement denses ($n \approx 20 \text{ cm}^{-3}$) qui occupent 2 à 4 % du volume. Ces nuages sont entourés d'une composante plus chaude ($T \approx 6.10^3 \text{ K}$, $n \approx 0,3 \text{ cm}^{-3}$) qui englobe 20 % du volume.

L'hydrogène ionisé peut être observé à la fois par son émission optique et par son émission radio. Optiquement, on observe les raies de recombinaison de l'hydrogène. Dans le domaine radio, on observe également des raies de recombinaison ainsi que l'émission due au freinage des électrons. Les régions H II ($T \approx 8.10^3 \text{ K}$, $n > 0,5 \text{ cm}^{-3}$) se trouvent au voisinage d'étoiles très chaudes, donc jeunes et massives, dont le rayonnement ultraviolet ionise l'hydrogène interstellaire. Cette composante occupe environ 10 % de l'espace interstellaire. Une composante très chaude, de faible densité ($T \approx 10^6 \text{ K}$, $n \approx 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$) est constituée du gaz échauffé par les explosions de supernovae et occupe 70 % du volume.

La poussière interstellaire se présente sous la forme de grains solides de dimensions de l'ordre du micron. Ils sont composés de silicates et de glaces. La masse de poussière ne représenterait qu'un centième de la masse du gaz interstellaire.

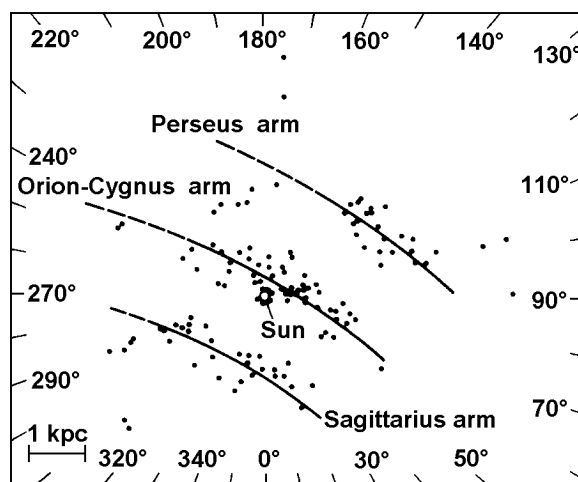


FIG. 2.6 – Les bras spiraux dans le voisinage solaire (Mihalas et Binney, 1981).

Déformation du disque

L'hydrogène neutre constitue, en première approximation un disque mince, presque plan. Toutefois, ce disque est déformé, gauchi, de façon symétrique par rapport au centre. D'un côté, le bord du disque est surélevé et de l'autre abaissé (le terme anglais *warps* est parfois traduit par ondolements). Cette déformation est presque sinusoïdale en fonction de la longitude galactique et n'est significative qu'à des distances galactocentriques supérieures à 10 kpc. Elle atteint 1 kpc à une distance de 15 kpc. Des causes diverses ont été invoquées pour expliquer cette déformation : oscillation primordiale, instabilité du disque, interaction avec le Grand Nuage de Magellan, interaction avec le milieu intergalactique.

La structure spirale

Les figures 2.6 et 2.7 montrent les bras spiraux de notre Galaxie.

2.3 La composante sphéroïdale

En plus du disque, notre Galaxie contient également une distribution grossièrement sphérique d'étoiles, le sphéroïde. Les amas globulaires et les RR Lyrae qui sont des constituants typiques de la composante sphéroïdale peuvent être identifiés dans tout le volume de la Galaxie. Dans le voisinage solaire, la composante sphéroïdale est également représentée par des sous-naines (étoiles de type F, G ou K, moins lumineuses que les étoiles de la séquence principale et caractérisées par leur pauvreté en métaux) ; ces étoiles ne peuvent être détectées que localement. La composante sphéroïdale contient peu ou pas de poussières et de gaz interstellaires, excepté dans le noyau galactique. La cinématique des étoiles de la

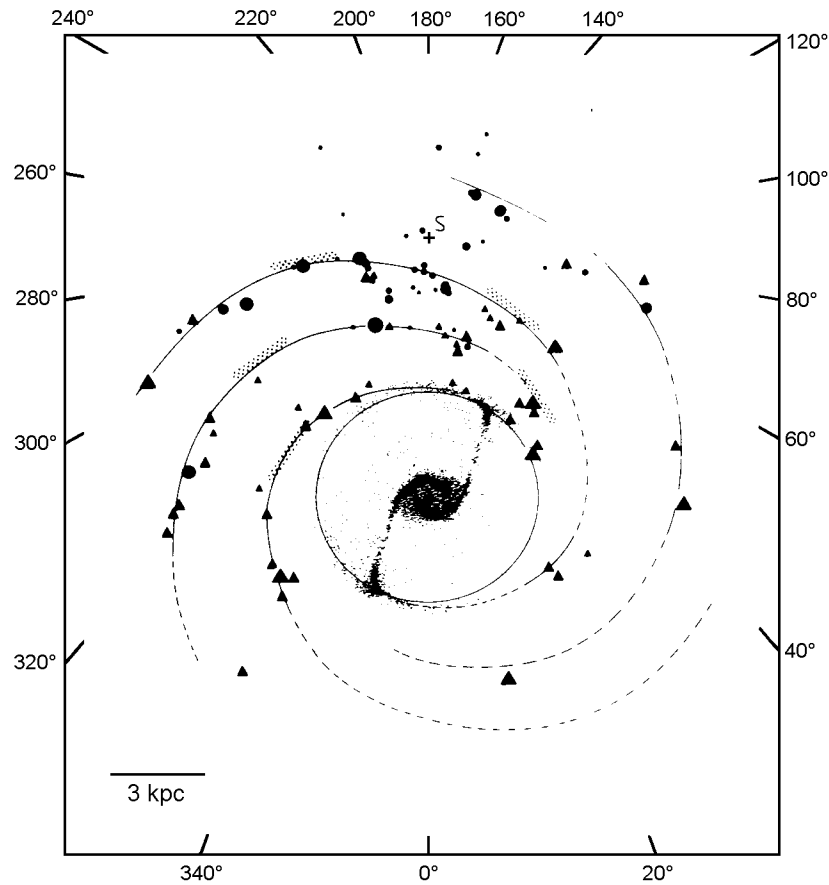


FIG. 2.7 – Structure de la Galaxie. Mezger, Duschl, Zylka, 1996.

composante sphéroïdale est totalement différente de celle des étoiles du disque, elles ont peu de mouvement de rotation d'ensemble mais présentent de grandes vitesses aléatoires.

La luminosité de la composante sphéroïdale est relativement peu importante en comparaison de celle du disque, elle contribue pour environ 15 à 20 % de la luminosité totale de la Galaxie. La distribution de lumière dans la composante sphéroïdale est bien représentée par une loi en $R^{1/4}$ avec un rayon effectif de 2,7 kpc.

On divise la composante sphéroïdale en noyau (la partie la plus interne, jusqu'à 300 pc), bulbe (de 0,3 à 3 kpc) et en halo (au-delà de 3 kpc).

Le halo

Le halo est sphéroïdal et tourne lentement. Sa structure est soutenue par les mouvements aléatoires des étoiles qui le composent. Les données concernant son aplatissement sont assez discordantes. Les comptages d'étoiles donnent des valeurs de $c/a > 0,8$ alors que les modèles dynamiques prenant en compte l'anisotropie du tenseur de dispersion des vitesses donnent des valeurs de c/a comprises entre 0,3 et 0,5. Le désaccord pourrait être réduit si le halo était constitué d'une composante interne aplatie (qui est dominante dans le voisinage du Soleil et influence les études dynamiques) et d'une composante sphérique externe

(qui influencerait les comptages d'objets à des distances galactocentriques comprises entre 10 et 20 kpc).

La plupart des étoiles pauvres en métaux ($[\text{Fe}/\text{H}] < -1$) appartiennent au halo. Il ne semble pas y avoir de gradient de métallicité dans le halo. Pour chaque valeur de r , les étoiles du halo présentent un large éventail de métallicité. Les étoiles du halo sont des étoiles vieilles, elles se seraient formées en même temps que la Galaxie.

Sa densité est assez bien représentée par une loi en $r^{-3,5}$. Au voisinage du Soleil, la densité du halo ne représente que 0,1 à 0,2 % de la densité du disque

Les mesures de la vitesse de rotation et des dispersions au voisinage du Soleil dépendent des échantillons sélectionnés. Les valeurs suivantes doivent être considérées avec prudence : vitesse de rotation $\approx 40 \text{ km s}^{-1}$ et $(\sigma_R, \sigma_\phi, \sigma_z) \approx (140, 100, 75) \text{ km s}^{-1}$.

Si on se tourne vers des objets plus distants, on possède des données sur les RR Lyrae, les étoiles de la branche horizontale et les amas globulaires. Il semblerait que l'ellipsoïde des vitesses soit relativement indépendant de z en coordonnées cylindriques. Le grand axe de l'ellipsoïde des vitesses est donc orienté vers l'axe de rotation galactique plutôt que vers le centre galactique. Ces données reposent toutefois sur des échantillons d'assez petite taille et demanderaient à être confirmées.

Le bulbe

Si notre Galaxie était vue de profil, sa composante sphéroïdale apparaîtrait seulement sous la forme d'un bulbe central, le halo contribuerait pour une part négligeable à la brillance. Contrairement au halo, le bulbe est riche en métaux, $-1 < [\text{Fe}/\text{H}] < 1$, avec un maximum vers 0,3. Les étoiles du bulbe auraient des âges allant de 10^9 à $15 \cdot 10^9$ ans. Si les observations effectuées sur d'autres galaxies peuvent être extrapolées à la nôtre, le bulbe serait en rotation « cylindrique » (la vitesse de rotation à une distance donnée de l'axe serait indépendante de la hauteur au-dessus du plan galactique). La dispersion des vitesses dans le bulbe serait de l'ordre de 125 km s^{-1} .

Depuis longtemps les observations radio à 21 cm de l'hydrogène neutre révèlent des mouvements non circulaires à des vitesses de quelques centaines de km s^{-1} . Ces observations ont suggéré la présence d'une barre centrale dont l'existence est maintenant bien établie. Elle s'étend jusqu'à 2,4 kpc au moins, sa masse serait de 10^{10} à $3 \cdot 10^{10} M_\odot$ et ses axes seraient dans le rapport 3:1:1. Les observations infrarouges montrent également l'existence d'une structure en forme de barre dans la partie la plus interne du bulbe.

Le centre galactique

Dans le domaine optique, le noyau de la Galaxie est caché par d'épais nuages de poussière. Il n'a été révélé récemment que par ses émissions dans les domaines radio, infrarouge et X. Le centre galactique apparaît comme une région extrêmement complexe.

On détecte (raie de CO) une forte concentration de gaz moléculaire à l'intérieur d'une zone centrale de 200 pc de rayon. Cette région contiendrait de $5 \cdot 10^7$ à $10^8 M_\odot$ de gaz à une

température comprise entre 30 et 200 K (typiquement 70 K). Une composante très chaude, responsable d'une émission X étendue est également présente. Le champ magnétique, mis en évidence par des structures filamentaires dans le domaine radio et par la polarisation du rayonnement infrarouge, joue probablement un rôle important. Des étoiles se forment dans ces régions centrales, dans des conditions fort différentes de celles qu'on trouve ailleurs dans la Galaxie : la température, la pression et la dispersion des vitesses y sont bien plus élevées.

Notre Galaxie abrite en son centre une source radio (rayonnement synchrotron) compacte, Sgr A* (à distinguer du complexe radio étendu Sgr A). Les observations (vitesse du gaz et des étoiles) indiquent la présence d'une masse centrale de 2.10^6 à $3.10^6 M_{\odot}$ à moins de 0,015 pc de Sgr A*. Bien que les modèles proposés pour décrire le centre galactique diffèrent considérablement, ils reposent tous sur un scénario d'accrétion sur un objet compact, qui serait peut-être un trou noir.

La couronne

Divers arguments d'ordre dynamique (allure de la courbe de rotation, vitesse d'échappement, ...) font penser qu'une partie importante, peut-être jusqu'à 90 % de la masse de la Galaxie n'est pas lumineuse et échappe aux observations visuelles. C'est cette masse cachée qu'on appelle halo obscur ou couronne.

2.4 Le système d'amas globulaires

Les amas globulaires de la Galaxie semblent se répartir en deux familles distinctes qui diffèrent par leurs propriétés spatiales, chimiques et cinématiques.

La distribution de métallicité des amas globulaires est bimodale, les deux groupes se séparant vers $[Fe/H] \approx -1$. Les amas du groupe riche en métaux se répartissent dans un disque tournant avec une vitesse de 150 km s^{-1} , la dispersion des vitesses σ est de l'ordre de 70 km s^{-1} . L'épaisseur de ce disque est mal déterminée. Il est tentant de considérer que ces amas appartiennent au même sous-système que le disque épais.

Les amas pauvres en métaux appartiennent à une population sphéroïdale en rotation lente d'environ 50 km s^{-1} et leur dispersion des vitesses est de l'ordre de 115 km s^{-1} . Le tenseur de dispersion des vitesses serait assez isotrope, à la différence des étoiles du champ du halo. Toutefois les incertitudes sont assez grandes et il serait prématuré de tirer des conclusions définitives quant à une différence entre les processus de formation de ces amas globulaires et des étoiles du halo.

2.5 Formation de la Galaxie et populations stellaires

C'est Baade, vers le milieu des années 1940, qui prit conscience de l'existence de différentes populations stellaires. Initialement, on distingua deux populations.

La population I est caractéristique des bras spiraux. Les objets qui la composent sont jeunes et riches en métaux. Leurs orbites autour du centre galactique sont essentiellement circulaires avec de faibles dispersions des vitesses et ils constituent des systèmes aplatis.

La population II est caractéristique de la composante sphéroïdale. Les objets qui la composent sont vieux (les amas globulaires) et pauvres en métaux. Ils présentent peu de rotation d'ensemble et leurs orbites sont très excentriques avec de grandes dispersions des vitesses. Ils constituent des systèmes peu ou pas aplatis.

La répartition des étoiles en deux populations fut progressivement affinée, en même temps que se développait un scénario de formation de la Galaxie. Celle-ci se serait formée à partir d'un matériau primordial contenu dans un volume beaucoup plus étendu que son volume actuel. Les deux composants majeurs de la Galaxie, la composante sphéroïdale et le disque, auraient été formés par des processus différents et doivent être décrits séparément.

La composante sphéroïdale a été formée entièrement au cours d'un processus d'effondrement essentiellement radial, en quelques centaines de millions d'années. Les générations successives d'étoiles ont enrichi le milieu interstellaire à partir duquel se sont formées les générations suivantes (la durée de vie des étoiles massives est courte comparée à la durée de l'effondrement gravitationnel). Le peu de rotation d'ensemble des étoiles de la composante sphéroïdale, leur grande dispersion des vitesses et l'excentricité de leurs orbites sont bien compatibles avec un effondrement radial rapide. Ce scénario explique également la métallicité plus élevée des étoiles du bulbe et des amas globulaires les plus proches du centre galactique.

Les étoiles du disque ont commencé à se former après l'effondrement de la composante sphéroïdale à partir d'un matériau déjà enrichi, après que les mouvements du gaz aient été circularisés par les collisions inélastiques entre les nuages interstellaires. Les étoiles du disque seraient nées dans un disque mince avec des orbites à peu près circulaires et avec de faibles dispersions des vitesses. Mais au cours du temps, la dispersion des vitesses se serait accrue (cet accroissement progressif de la dispersion des vitesses est appelé diffusion stellaire) par le jeu des mécanismes suivants :

- rencontres avec des nuages moléculaires géants
- perturbations gravifiques dues aux bras spiraux
- perturbations transitoires du disque causées par le passage d'objets massifs (galaxies naines, trous noirs supermassifs, ...) sur des orbites inclinées par rapport au plan galactique.

Les étoiles les plus jeunes du voisinage solaire appartiennent à la population des bras spiraux. Ces étoiles sont rassemblées en amas ou en associations dans des régions du plan galactique riches en poussière et en gaz où elles se sont formées récemment. Cette population contient des étoiles de toutes masses mais pas de naines blanches. Les membres les plus lumineux sont des supergéantes bleues. Ces étoiles très lumineuses rendent cette population particulièrement voyante bien qu'elle contribue peu à la densité locale. Ces étoiles se meuvent sur des orbites pratiquement circulaires et leur dispersion des vitesses est faible.

Après quelques centaines de millions d'années la plupart des amas et associations sont disloqués et leurs constituants dispersés. Ces étoiles forment alors la population jeune du disque. Les étoiles bleues massives ont disparu, elles ont évolué en naines blanches ou

étoiles de neutrons. La plupart des étoiles A et F appartiennent à cette population. Cette population commence à montrer une dispersion des vitesses et la composante azimutale de leur vitesse commence à montrer un retard sur la vitesse circulaire locale. Elles diffusent à des distances plus grandes du plan galactique que le groupe précédent.

Les étoiles plus âgées ($\approx 5 \cdot 10^9$ ans) forment la population intermédiaire du disque. Les étoiles A et F ont disparu et le nombre de naines blanches a augmenté. Cette population contient un grand nombre de sous-géantes et de géantes rouges. Elle contient aussi des nébuleuses planétaires et des novae. La dispersion autour du plan galactique est plus grande que pour le groupe précédent. Il en est de même pour la dispersion des vitesses et le retard sur la vitesse circulaire.

La vieille population du disque contient des étoiles pouvant atteindre 10^{10} ans. Les tendances décrites ci-dessus s'accroissent. La hauteur d'échelle de part et d'autre du plan galactique atteint 700 pc.

À l'heure actuelle, il n'y a pas de consensus sur le scénario de formation de la Galaxie. Celui que nous avons décrit ci-dessus est fort schématique et ne tient pas compte de l'enrichissement possible du halo par des fragments (dont les masses seraient de l'ordre de $10^8 M_{\odot}$) qui auraient évolué indépendamment. Pour plus de précisions, on se reportera à la littérature.

Références

On trouvera des précisions sur la structure de la Galaxie dans Mihalas et Binney (1981), Freeman (1987), Gilmore et al. (1989), Blitz et Teuben (1996), Mezger et al. (1996) et Binney et Merrifield (1998). Le bulbe est décrit dans les articles de Frogel (1988) et de Wyse et al. (1997). Pour une description détaillée du centre galactique, consulter les articles de Morris et Serabyn (1996), d'Eckart et Genzel (1996) et de Sofue et Rubin (2001).

Les scénarios de formation de la Galaxie sont décrits et discutés dans l'article de Majewski (1993) et au chapitre 10 du livre de Binney et Merrifield (1998).

Au cours de la mission spatiale Hipparcos (1989–1993), des données sur plus d'un million d'étoiles ont été recueillies. Pour plus d'une centaine de milliers d'entre elles, les positions, les parallaxes et les mouvements propres ont été déterminés avec une précision inégalée d'un millième de seconde d'arc. Ces données ont été publiées dans le catalogue Hipparcos (ESA, 1997). Dans une sphère de 125 pc de rayon centrée sur le Soleil, 90% des distances stellaires sont ainsi connues avec une précision meilleure que 10%.

Binney J., Merrifield M., 1998. Galactic astronomy. Princeton University Press.

Blitz L., Teuben P., 1996. Unsolved problems of the Milky Way, IAU 169th symposium. Kluwer.

Crézé M., Chereul E., Bienaymé O. Pichon C., 1998. The distribution of nearby stars in phase space mapped by Hipparcos. I. The potential well and local dynamical mass. *Astron Astrophys*, 329, 920–936.

Dehnen W., Binney J.J., 1998. Local stellar kinematics from Hipparcos data. *Month Not Roy Astron Soc*, 298, 387–394.

- Eckart A., Genzel R., 1996. Observations of stellar proper motions near the galactic center. *Nature*, 383, 415–417.
- ESA, 1997. The Hipparcos Catalogue. ESA SP-1200.
- Freeman K.C., 1987. The galactic spheroid and old disk. *Ann Rev Astron Astrophys*, 25, 603–632.
- Frogel J.A., 1988. The Galactic nuclear bulge and the stellar content of spheroidal systems. *Ann Rev Astron Astrophys*, 26, 51–92.
- Gilmore G., King I., van der Kruit P., 1989. The Milky Way as a galaxy, 19th advanced course of the Swiss Society of Astrophysics and Astronomy. Geneva Observatory.
- Majewski S.R., 1993. Galactic structure surveys and the evolution of the Milky Way. *Ann Rev Astron Astrophys*, 31, 575–638.
- Mezger P.G., Duschl W.J., Zylka R., 1996. The Galactic center : a laboratory for AGN ? *The Astron Astrophys Rev*, 7, 289–388.
- Mihalas D., Binney J., 1981. Galactic astronomy. Freeman.
- Morris M., Serabyn E., 1996. The Galactic center environment. *Ann Rev Astron Astrophys*, 34, 645–701.
- Porcel C., Garzón F., Jiménez-Vincente J., Battaner E., 1998. The radial scale length of the Milky way. *Astron Astrophys*, 330, 136–138.
- Sofue Y., Rubin V., 2001. The supermassive black hole at the galactic center. *Ann Rev Astron Astrophys*, 39, 309–352.
- Wyse R.F.G., Gilmore G., Franx M., 1997. Galactic bulges. *Ann Rev Astron Astrophys*, 35, 637–675.

Chapitre 3

Cinématique du disque dans le voisinage solaire

Les vitesses stellaires sont toujours mesurées par rapport au Soleil (par rapport à la Terre mais corrigée du mouvement de celle-ci autour du Soleil). Il est donc primordial de connaître la vitesse du Soleil par rapport au repère local et par rapport au repère fondamental.

3.1 Le mouvement du Soleil

La vitesse vectorielle d'une étoile par rapport au Soleil se déduit de sa vitesse radiale et de sa vitesse tangentielle. La détermination des vitesses radiales ne pose guère de problème, du moins pour les étoiles brillantes. Il n'en va pas de même pour la vitesse tangentielle dont la détermination repose sur la détermination du mouvement propre et de la distance. La mission Hipparcos a permis d'obtenir des parallaxes et des mouvements propres fiables dans le voisinage solaire jusqu'à des distances de 125 pc. Des distances plus grandes, mais moins précises, peuvent être obtenues par des méthodes spectroscopiques pour des types spectraux bien définis. En pratique nos connaissances de la cinématique précise des étoiles sont limitées à un volume assez restreint du voisinage solaire.

Si nous connaissons la vitesse moyenne \vec{v} d'un groupe d'étoiles par rapport au Soleil, la vitesse \vec{v}_{\odot} du Soleil par rapport à ce groupe d'étoiles est évidemment

$$\vec{v}_{\odot} = -\vec{v}.$$

Notons qu'on peut déterminer \vec{v}_{\odot} à partir des seules vitesses radiales des étoiles observées ou de leurs mouvements propres et parallaxes. La direction du mouvement solaire, c'est-à-dire de \vec{v}_{\odot} est appelée apex.

La vitesse du Soleil \vec{v}_{\odot} par rapport à un groupe d'étoiles dépend du groupe considéré. Ceci résulte du fait que les différents groupes d'étoiles ne tournent pas à la même vitesse autour du centre galactique, phénomène connu sous le nom de courant asymétrique. La vitesse du Soleil par rapport aux étoiles du halo est plus grande que sa vitesse par rapport

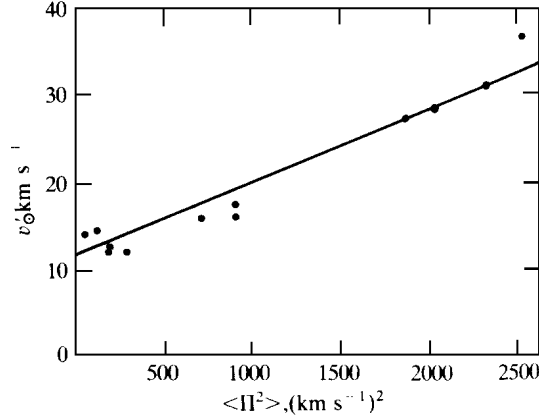


FIG. 3.1 – Relation entre la vitesse du Soleil par rapport à différents groupes d'étoiles et la dispersion des vitesses radiales (Mihalas et Binney, 1981).

aux étoiles du disque. Cela est dû au fait que le disque, auquel appartient le Soleil est en rotation plus rapide que le halo.

Les déterminations de \vec{v}_\odot par rapport à des groupes d'étoiles de différents types du disque montrent que les composantes $v_{\odot R}$ et $v_{\odot z}$ sont sensiblement les mêmes. Il n'en va pas de même pour la composante $v_{\odot \phi}$ qui dépend du groupe considéré et qui est une fonction linéaire de σ_R^2 , de la forme

$$v_{\odot \phi} = a + \sigma_R^2/D.$$

La figure 3.1, réalisée avec des données anciennes, montre le principe de la méthode. A partir des données Hipparcos, Dehnen et Binney (1998) obtiennent $D = 80 \text{ km s}^{-1}$ et en extrapolant pour $\sigma_R^2 = 0$, ils obtiennent la composante azimutale de la vitesse du Soleil par rapport au repère local (en mouvement à la vitesse $v_c(R_0)$ par rapport au repère fondamental). La vitesse du Soleil par rapport au repère local ainsi obtenue est $\vec{v}_\odot = (-10, 5, 7) \text{ km s}^{-1}$. Il faut toutefois signaler que d'autres études récentes donnent $v_{\odot \phi} \approx 10$ à 12 km s^{-1} (Pont et al. 1994). La direction définie par la vitesse du Soleil par rapport au repère local est la direction de l'apex.

3.2 Détermination du mouvement du repère local

Le mouvement du Soleil par rapport au repère local étant connu, il suffit de déterminer la vitesse du Soleil par rapport à un groupe d'objets qu'on peut considérer comme étant au repos par rapport au repère fondamental. Plusieurs approches ont été considérées.

Il est raisonnable de penser que le halo tourne dans le même sens que le disque et, comme il est approximativement sphérique, que sa vitesse de rotation est faible. La mesure de la vitesse du Soleil par rapport à des objets du halo (amas globulaires distants du plan galactique, RR Lyrae pauvres en métaux) fournira ainsi une borne inférieure de $v_c(R)$ (correspondant au cas d'une vitesse de rotation nulle pour les objets du halo).

La seconde méthode est basée sur le fait qu'on ne doit pas observer dans le voisinage solaire d'étoiles ayant des vitesses supérieures à la vitesse d'échappement v_e . L'inégalité

suivante doit donc être satisfaite,

$$v_R^2 + (v_c + v'_\phi)^2 + v_z^2 \leq v_e^2.$$

En particulier, il existe une vitesse critique v_{cr} (par rapport au repère local) pour une étoile se déplaçant dans la direction de la rotation galactique, donnée par

$$(v_c + v_{cr})^2 = v_e^2.$$

De ces deux relations on tire

$$\frac{v_R^2 + v'_\phi^2 + v_z^2 - v_{cr}^2}{2(v_{cr} - v'_\phi)} \leq v_c.$$

L'inégalité étant remplacée par l'égalité pour les étoiles possédant juste la vitesse d'échappement. En déterminant v_{cr} et en évaluant le premier membre pour un échantillon d'étoiles à grande vitesse, on peut donc obtenir une estimation de v_c . Il est cependant difficile d'estimer correctement v_{cr} et les résultats obtenus par cette méthode sont très incertains. Avec $v_{cr} \approx 110 \text{ km s}^{-1}$, on obtient $v_c \approx 275 \text{ km s}^{-1}$ et $v_e \approx 385 \text{ km s}^{-1}$. Cette valeur de la vitesse d'échappement est vraisemblablement sous-estimée.

La troisième méthode repose sur la détermination du mouvement solaire par rapport aux galaxies du groupe local qu'on déduit des mesures des vitesses radiales de ces galaxies. La vitesse du Soleil par rapport au centroïde de ce groupe, qu'on assimile au centre de masse, est constituée de trois composantes : la vitesse du Soleil par rapport au repère local, la vitesse du repère local par rapport au repère fondamental et la vitesse du centre galactique par rapport au groupe local. Il reste donc le problème de la détermination de la vitesse du centre galactique par rapport au groupe local. Notre Galaxie et M 31 (la grande galaxie spirale d'Andromède) contribuant pour une large part à la masse du groupe local, il est possible d'obtenir une estimation grossière de la vitesse de notre Galaxie par rapport au centre de masse du groupe local. On peut également utiliser les galaxies proches, au-delà du groupe local, pour déterminer la vitesse orbitale du Soleil dans la Galaxie (Karachentsev, Makarov, 1996). Notre connaissance de $v_c(R_0)$ est entachée d'une assez grande incertitude. Nous retiendrons l'estimation $v_c(R_0) = 220 \pm 15 \text{ km s}^{-1}$.

Une quatrième méthode repose sur la mesure du mouvement propre de Sgr A* (Backer, 1996, Backer, Sramek 1999 et Reid et al., 1999). Ce mouvement propre est dû au mouvement du Soleil par rapport au centre de masse de la Galaxie. Il peut toutefois contenir une composante due au mouvement de Sgr A* par rapport au centre de masse de la Galaxie.

3.3 Cinématique des étoiles dans le voisinage solaire

L'observation des étoiles du disque dans le voisinage solaire a fourni les résultats suivants. Pour tous les groupes d'étoiles les composantes \bar{v}_R et \bar{v}_z sont nulles, ce qui ne surprend pas au vu des symétries du système. Par contre, la composante \bar{v}_ϕ liée à la rotation galactique dépend du groupe d'étoiles considéré. Ce phénomène porte le nom de courant asymétrique. Cette composante de la vitesse est plus faible que la vitesse de rotation sur une orbite

circulaire $v_c(R)$ dans le repère fondamental (les étoiles traînent par rapport à un objet en orbite circulaire). De façon équivalente, on peut dire également que cette composante est négative dans le repère local. De façon plus spécifique on désigne par courant asymétrique la différence entre les deux vitesses, $v_a = v_c(R) - \bar{v}_\phi$; v_a est typiquement de 15 km s^{-1} , plus petit pour les étoiles jeunes et jusqu'à 20 km s^{-1} pour les étoiles vieilles.

Un des axes de l'ellipsoïde des vitesses est toujours orienté perpendiculairement au plan galactique. Il suffit donc, pour préciser complètement l'orientation de l'ellipsoïde, de spécifier la longitude galactique de son grand axe. La direction de celui-ci est appelée direction du vertex. Elle est approximativement celle du centre galactique. L'angle entre la direction du vertex et le centre galactique s'appelle déviation du vertex. Dans la plupart des travaux de dynamique stellaire, on ignore la déviation du vertex et on fait l'approximation que les axes de l'ellipsoïde des vitesses sont alignés sur ceux du repère cartésien local. La longitude galactique du vertex dépend du groupe d'étoiles considéré. Elle est d'environ 20° pour les étoiles de type précoce et de 10° pour les étoiles vieilles (Dehnen, Binney, 1998). Le fait que les plus grandes déviations du vertex sont associées à des étoiles très jeunes résulterait des conditions dynamiques locales du milieu interstellaire au lieu et à l'instant de leur formation et serait probablement la manifestation du champ de vitesse du gaz dans un bras de spirale passant au voisinage du Soleil.

Pour tous les types spectraux on a $\sigma_R > \sigma_\phi > \sigma_z$. On a approximativement $\sigma_z/\sigma_R \approx 0,45$ tandis que $\sigma_\phi/\sigma_R \approx 0,65$ pour la plupart des groupes d'étoiles. Le fait que $\sigma_z \neq \sigma_R$ a des implications dynamiques importantes. La dispersion des vitesses est d'autant plus élevée que l'âge du groupe d'étoiles considéré est élevé, σ_R est de l'ordre de 15 km s^{-1} pour les types les plus précoces et de 40 km s^{-1} pour les étoiles vieilles.

Il y a une relation linéaire entre le courant asymétrique et σ_R^2 . C'est évidemment la même relation que celle qui exprime la vitesse du Soleil par rapport à différents groupes d'étoiles en fonction de σ_R^2 , hormis le terme indépendant,

$$v_a = \sigma_R^2/D.$$

Cette relation, trouvée empiriquement, est une conséquence des équations de la dynamique stellaire, elle sera justifiée plus loin.

Référence

- Backer D., 1996. Diameter and Proper Motion of SGR A*. In the Proceedings of the 169th Symposium of the International Astronomical Union, held in The Hague, The Netherlands, August 23-29, 1994, Dordrecht Kluwer, edited by Leo Blitz and Peter Teuben., p.193.
- Backer D.C., Sramek R.A., 1999. Proper Motion of the Compact, Nonthermal Radio Source in the Galactic Center, Sagittarius A*. *ApJ*, 524, 805–815.
- Binney J., Merrifield M., 1998. *Galactic astronomy*. Princeton University Press.
- Dehnen W., Binney J., 1998. Local stellar kinematics from Hipparcos data. *Month Not Roy Astron Soc*, 298, 387–394.

- Karachentsev I.D., Marakov D.I., 1996. Orbital velocity of the Sun and the apex of the Galactic center. *Astron Letters*, 22, 455–458.
- Mignard F., 2000. Local galactic kinematics from Hipparcos proper motions. *Astron Astrophys*, 354, 522–536.
- Mihalas D., Binney J., 1981. *Galactic astronomy*. Freeman.
- Pont F., Mayor M., Burki G., 1994. New radial velocities for classical cepheids. Local galactic rotation revisited. *Astron Astrophys*, 285, 415–439.
- Reid M.J., Readhead A.C S., Vermeulen R.C., Treuhaft R.N., 1999. The Proper Motion of Sagittarius A*. I. First VLBA Results. *ApJ*, 524, 816–823.

Chapitre 4

La rotation galactique

Nous nous proposons de calculer la contribution de la rotation galactique aux mouvements relatifs des étoiles du disque. Nous ne considérons, dans ce chapitre, que des objets situés dans le plan galactique et nous ignorons leurs mouvements individuels par rapport au référentiel local. Soit C le centre galactique, S le Soleil et P une étoile quelconque du disque (voir figure 4.1). Les composantes radiale et transversale de la vitesse de l'étoile par rapport au Soleil s'écrivent

$$v_R = v_c \cos \alpha - v_0 \sin \ell, \quad v_T = v_c \sin \alpha - v_0 \cos \ell.$$

D'autre part, on a

$$R_0 \sin \ell = R \cos \alpha, \quad R_0 \cos \ell = R \sin \alpha + r.$$

On peut donc écrire

$$v_R = R_0(\Omega - \Omega_0) \sin \ell, \quad v_T = R_0(\Omega - \Omega_0) \cos \ell - \Omega r,$$

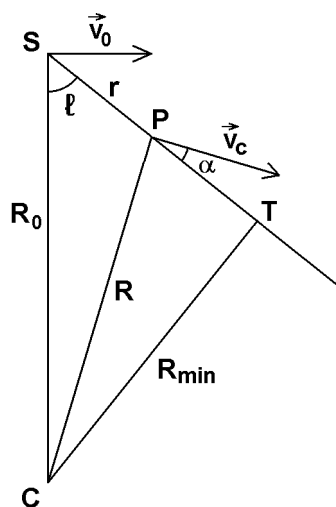


FIG. 4.1 – Influence de la rotation galactique sur le mouvement d'une étoile P par rapport au Soleil S .

où Ω et Ω_0 sont les vitesses angulaires de la rotation galactique à la position de l'étoile P et du Soleil respectivement. Pour une distribution réaliste des masses dans la Galaxie, $\Omega(R)$ est une fonction décroissante de R . Considérons la variation de v_R le long d'une ligne de visée donnée, caractérisée par une longitude galactique ℓ . Pour une ligne de visée faisant un angle de plus de 90° avec la direction du centre galactique, le module de v_R croît monotonément avec la distance r de l'objet observé. Au contraire, lorsque l'angle entre la ligne de visée et la direction du centre galactique est inférieur à 90° , le module de v_R passe par un maximum au point T de la ligne de visée le plus proche du centre galactique (sa distance au centre galactique vaut $R_{min} = R_0 \sin \ell$). La valeur de l'extremum de v_R est donnée par

$$v_{R,max} = v_c(R_0 \sin \ell) - v_0 \sin \ell .$$

4.1 Rotation galactique dans le voisinage solaire et formules de Oort

Si l'étoile est située au voisinage du Soleil, on peut développer $\Omega(R)$ en série de Taylor et se limiter au premier ordre,

$$\Omega \approx \Omega_0 + (R - R_0) \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_0 ,$$

et, puisque r est petit,

$$R - R_0 \approx -r \cos \ell .$$

En faisant ces approximations dans les expressions de v_R et v_T , on obtient les formules de Oort,

$$v_R = Ar \sin 2\ell , \quad v_T = (A \cos 2\ell + B)r ,$$

où A et B sont les constantes de Oort, définies par

$$A = -\frac{1}{2}R_0 \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right)_0 ,$$

$$B = -\frac{1}{2}R_0 \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_0 - \Omega_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right)_0 .$$

L'expression de la vitesse transversale peut être réécrite en termes du mouvement propre. L'accroissement μ_ℓ de la longitude galactique en secondes d'arc par an s'écrit

$$\mu_\ell = \frac{A \cos 2\ell + B}{4740} ,$$

où on prend pour A et B les valeurs numériques données ci-dessus.

Nous avons vu que si $-90^\circ < \ell < 90^\circ$, la vitesse radiale possède un maximum le long de la ligne de visée. Pour ℓ voisin de 90° ou de -90° , ce maximum se produit en un point du voisinage solaire et on peut écrire

$$v_{R,max} \approx 2AR_0(1 - \sin \ell) .$$

Détermination de A

On peut appliquer la relation

$$v_R = Ar \sin 2\ell$$

à des objets dont on connaît la distance et la vitesse radiale.

On peut aussi appliquer la relation

$$\mu_\ell = \frac{A \cos 2\ell + B}{4740}$$

à des objets dont le mouvement propre est connu.

À partir des mouvements propres de céphéides mesurés par Hipparcos, Feast et White-lock (1997) ont estimé

$$A = 14,82 \pm 0,84 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

Détermination de B

La seule méthode directe est l'application de la relation

$$\mu_\ell = \frac{A \cos 2\ell + B}{4740}$$

à des objets dont on connaît le mouvement propre. La petitesse des mouvements propres et la difficulté d'éliminer les erreurs systématiques rendent particulièrement délicate l'application de la méthode directe.

On peut également utiliser la relation suivante, fournie par la dynamique stellaire et qui lie les constantes de Oort aux dispersions des vitesses,

$$\frac{-B}{A - B} = \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_R^2}.$$

À partir des mouvements propres de céphéides mesurés par Hipparcos, Feast et White-lock (1997) ont estimé

$$B = -12,37 \pm 0,64 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

Détermination de R_0

On peut estimer directement R_0 à partir de la distribution d'objets disposés symétriquement autour du centre galactique (amas globulaires, RR Lyrae). Le problème est de bien tenir compte de l'absorption interstellaire.

On peut estimer R_0 de façon indirecte. On recherche des étoiles lumineuses (céphéides, étoiles OB) situées à grande distance du Soleil et situées à la même distance que le Soleil du centre galactique (figure 4.2). Ces étoiles ont une vitesse radiale nulle par rapport au Soleil. On a alors

$$R_0 = \frac{1}{2}r \sec \ell.$$

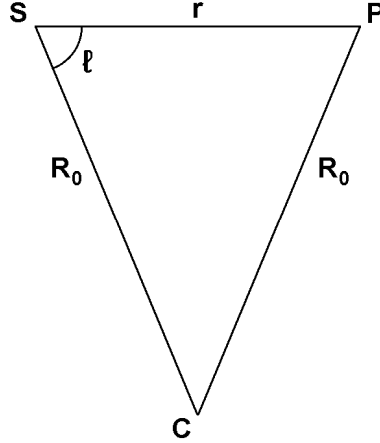


FIG. 4.2 – L'étoile P est à la même distance du centre galactique C que le Soleil S .

Détermination de AR_0

L'observation de la raie de l'hydrogène neutre à 21 cm à différentes longitudes galactiques et la détermination de $v_{R,max}(\ell)$ permet d'obtenir le produit AR_0 à partir de la relation

$$v_{R,max} \approx 2AR_0(1 - \sin \ell) \quad \text{pour } \ell \approx \pm 90^\circ.$$

Les observations donnent $AR_0 \approx 115 \text{ km s}^{-1}$ avec une incertitude importante.

Détermination de v_0

Nous avons vu plus haut quelques procédés de détermination de v_0 . On peut également déduire la valeur de v_0 des valeurs des constantes de Oort et de R_0 :

$$v_0 = (A - B)R_0.$$

4.2 Détermination de la courbe de rotation

On déduit la courbe de rotation galactique de l'observation d'objets dont les vitesses présentent peu de dispersion et dont l'orbite est à peu près circulaire. Il s'agit d'objets jeunes : étoiles OB, céphéides, régions H II, nuages d'hydrogène interstellaire. Pour les distances au centre galactique inférieures à celle du Soleil, on utilise la raie à 21 cm de l'hydrogène neutre. Pour les régions externes, on observe les régions H II ou d'autres objets optiques.

Pour la partie interne de la Galaxie, il suffit de déterminer le maximum de vitesse radiale dans la raie à 21 cm pour différentes longitudes galactiques. La relation

$$v_{R,max} = R_0[\Omega(R_0 \sin \ell) - \Omega_0] \sin \ell$$

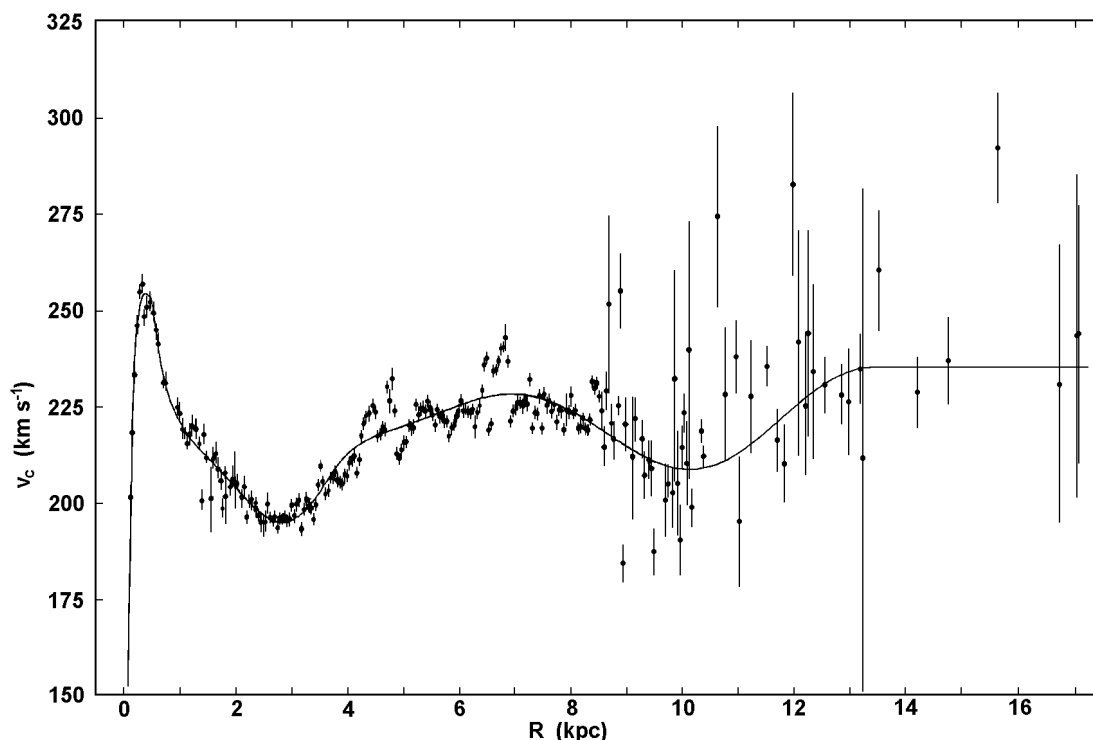


FIG. 4.3 – La courbe de rotation de la Galaxie (d’après Combes, 1991).

donne alors v_c pour différentes valeurs de $R = R_0 \sin \ell$. Cette méthode est souvent appelée méthode du point tangent. Elle donne la courbe de rotation pour $4 \text{ kpc} < R < R_0$.

La mesure de la rotation dans les parties externes de la Galaxie exige qu’on mesure indépendamment la vitesse radiale et la distance. Les régions H II se sont révélées fort utiles. Quand on a identifié l’étoile qui excite la région H II observée, on peut obtenir sa distance par des méthodes spectrophotométriques. La plupart des régions H II sont associées à des nuages moléculaires géants dont on mesure la vitesse radiale. Les céphéides peuvent également être utilisées pour déterminer la courbe de rotation dans les régions externes de la Galaxie. Ici, les distances sont déterminées à partir de la relation période-luminosité. On obtient la courbe de rotation jusqu’à environ 15 kpc.

L’allure de la courbe de rotation est donnée par la figure 4.3.

Références

Pour plus d’informations sur la détermination de la courbe de rotation galactique, voir Combes (1991) et Fich et Tremaine (1991). On trouvera des déterminations récentes de la rotation locale dans les articles de Pont et al. (1994) et de Feast et Whitelock (1997).

Binney J., Merrifield M., 1998. Galactic astronomy. Princeton University Press.

Combes F., 1991. Distribution of CO in the Milky Way. *Ann Rev Astron Astrophys*, 29, 195–237.

- Dehnen W., Binney J., 1998. Local stellar kinematics from Hipparcos data. *Month Not Roy Astron Soc*, 298, 387–394.
- Feast M., Whitelock P., 1997. Galactic kinematics of cepheids from Hipparcos proper motions. *Month Not Roy Astron Soc*, 291, 683–693.
- Fich M., Tremaine S., 1991. The mass of the Galaxy. *Ann Rev Astron Astrophys*, 29, 409–445.
- Mignard F., 2000. Local galactic kinematics from Hipparcos proper motions. *Astron Astrophys*, 354, 522–536.
- Pont F., Mayor M., Burki G., 1994. New radial velocities for classical cepheids. Local rotation revisited. *Astron Astrophys*, 285, 415–439.

Chapitre 5

Théorie du potentiel gravifique

5.1 Force et potentiel

Quand nous ne les définissons pas, les systèmes de référence utilisés sont supposés inertiels. Un point matériel de masse M situé au point O exerce sur un point matériel de masse m situé en P une force

$$\vec{F} = -\frac{GMm\vec{r}}{r^3}, \quad \text{où } \vec{r} = \overrightarrow{OP}.$$

On note que cette force est proportionnelle à m et, par conséquent, elle communique au point P une accélération $\vec{\gamma}$ indépendante de sa masse

$$\vec{\gamma} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}.$$

Cette remarque reste valable quel que soit le système de masses qui crée le champ gravifique. On peut donc étudier le mouvement d'un point matériel P dans un champ gravifique en ignorant sa masse ou en supposant que sa masse est unitaire.

La force \vec{F} peut s'écrire sous la forme $\vec{F} = -m \text{grad } \Phi$, où $\Phi = -GM/r$ est le potentiel gravifique. Il est généralement plus agréable de travailler avec le potentiel Φ qu'avec la force \vec{F} car c'est un scalaire. Le champ gravifique créé au point P par les masses M_1, \dots, M_n , disposées aux points Q_1, \dots, Q_n , s'écrit

$$\Phi(P) = -\sum_{\alpha=1}^n \frac{GM_\alpha}{|Q_\alpha P|}.$$

Si la masse créant le champ gravifique est distribuée de façon continue avec la densité (les physiciens disent habituellement masse volumique) $\rho(Q)$, l'expression du potentiel gravifique doit être écrite

$$\Phi(P) = -G \int \frac{\rho(Q) dV_Q}{|QP|}.$$

La relation entre la densité ρ et le potentiel Φ peut également s'écrire sous la forme de l'équation de Poisson

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho,$$

qui se réduit, dans le vide, à l'équation de Laplace

$$\Delta\Phi = 0.$$

Si on utilise l'équation de Poisson pour calculer Φ , on exigera que Φ tende vers zéro à l'infini.

Le théorème de Gauss se déduit aisément de l'équation de Poisson. Considérons un volume V , contenant la masse M et limité par la surface S , alors le flux de la force de gravité à travers S est égal à $-4\pi GM$.

$$\oint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = -4\pi GM,$$

où $\vec{dS} = \vec{n} dS$ et \vec{n} est la normale unitaire en un point de S , dirigée vers l'extérieur.

5.2 Énergie gravifique

Considérons un système de n points matériels P_1, \dots, P_n , de masses m_1, \dots, m_n . Nous désignerons par $\vec{F}_{\alpha\beta}$ la force exercée par la particule P_β sur la particule P_α ($\beta \neq \alpha$).

$$\vec{F}_{\alpha\beta} = -\frac{Gm_\alpha m_\beta}{|P_\alpha P_\beta|^3} \overrightarrow{P_\beta P_\alpha} = -m_\alpha \text{grad}_{P_\alpha} \Phi_\alpha,$$

où

$$\Phi_\alpha = -\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{Gm_\beta}{|P_\beta P_\alpha|}.$$

En désignant par \vec{F}_α la force totale s'exerçant sur la particule P_α , les équations de Newton s'écrivent

$$m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha = \vec{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta}.$$

Utilisons le procédé habituel pour déduire une équation de conservation de l'énergie,

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \vec{\gamma}_\alpha - \sum'_{\alpha\beta} \vec{v}_\alpha \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} = 0,$$

où nous avons utilisé le symbole $\sum'_{\alpha\beta}$ pour indiquer qu'en sommant sur les deux indices, il convient d'omettre les termes pour lesquels $\alpha = \beta$. Le premier terme s'écrit aisément dT/dt où T est l'énergie cinétique du système,

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2.$$

Montrons que le second terme peut se mettre sous la forme dW/dt avec

$$W = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \Phi_\alpha = -\frac{1}{2} \sum'_{\alpha\beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|P_\alpha P_\beta|}.$$

Il vient en effet

$$\begin{aligned} -\sum'_{\alpha\beta} \vec{v}_\alpha \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} &= -\sum'_{\alpha\beta} \vec{v}_\beta \cdot \vec{F}_{\beta\alpha} = -\frac{1}{2} \sum'_{\alpha\beta} \vec{F}_{\alpha\beta} \cdot (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta) \\ &= \frac{1}{2} \sum'_{\alpha\beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|P_\alpha P_\beta|^3} \overrightarrow{P_\beta P_\alpha} \cdot \frac{d\overrightarrow{P_\beta P_\alpha}}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{1}{2} \sum'_{\alpha\beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|P_\alpha P_\beta|} \right\}. \end{aligned}$$

L'équation de conservation de l'énergie totale s'écrit donc

$$T + W = E.$$

L'expression W doit donc être interprétée comme l'énergie potentielle du système de points matériels. Dans le cas d'une distribution continue de matière, la forme correspondante de W s'écrit

$$W = \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV.$$

5.3 Le temps dynamique

Il n'y a pas de théorie de la formation des galaxies universellement acceptée. Les ordinateurs actuels permettent toutefois d'étudier l'évolution de systèmes d'un grand nombre de points matériels, au prix de compromis entre le nombre de points et la précision avec laquelle les équations de mouvement sont intégrées. En supposant que la formation du système étudié résulte d'une instabilité gravitationnelle, ces simulations montrent généralement l'existence de deux phases dans l'évolution du système. Dans un premier temps, il se contracte rapidement jusqu'à atteindre une configuration compacte. Après un temps de l'ordre de quelques fois le temps de chute libre, le système semble se maintenir dans un état stationnaire ou du moins évolue beaucoup plus lentement. Il est important d'avoir une estimation grossière des échelles de temps impliquées.

Considérons une sphère homogène d'un fluide dépourvu de pression et s'effondrant sous sa propre gravité. A partir d'un état de repos cet effondrement nécessite un temps (temps de chute libre)

$$\tau = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \approx \frac{0,7675}{\sqrt{G\rho}}.$$

La période d'une orbite circulaire dans le potentiel créé par le même système est de quatre fois le temps de chute libre,

$$\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \approx \frac{3,07}{\sqrt{G\rho}}.$$

Ces phénomènes sont caractérisés par une même échelle de temps, qu'on appelle le temps dynamique et que nous définirons par l'expression

$$\tau_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}}.$$

Nous étendrons la définition à un système quelconque en prenant pour ρ la densité moyenne du système considéré. Le temps dynamique est typiquement de l'ordre de 10^5 ans pour un amas globulaire et de l'ordre de 10^8 ans pour une galaxie.

5.4 Le théorème du viriel

Soit O un point fixe du référentiel et considérons un système mécanique isolé, composé de N points matériels P_α ($\alpha = 1 \dots N$). Leurs mouvements obéissent aux équations

$$m_\alpha \vec{\gamma}_\alpha = \vec{F}_\alpha.$$

Multiplions ces équations par $\vec{r}_\alpha = \overrightarrow{OP_\alpha}$ et sommons sur α .

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{\gamma}_\alpha = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{F}_\alpha.$$

Le premier membre peut être mis sous la forme

$$\frac{d}{dt} \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha - \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2T,$$

où $I = \sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^2$ est le moment d'inertie du système par rapport à O . Prenons la moyenne temporelle des deux membres de l'équation. Si les mouvements du système sont bornés, la moyenne de la dérivée qui y figure est nulle et il vient

$$2\overline{T} + \overline{\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{F}_\alpha} = 0.$$

Le terme $\overline{\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{F}_\alpha}$ est le viriel de Clausius et l'équation obtenue exprime le théorème du viriel. On notera que le viriel a les dimensions d'une énergie et qu'il est indépendant de l'origine choisie. Pour un système stationnaire, on peut évidemment omettre les barres de moyenne.

Calculons le viriel d'un système stellaire.

$$\sum_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot \vec{F}_\alpha = \sum'_{\alpha\beta} \vec{r}_\alpha \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum'_{\alpha\beta} (\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \cdot \vec{F}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \sum'_{\alpha\beta} \frac{Gm_\alpha m_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|} = W,$$

où W est l'énergie potentielle gravifique du système. Pour un système stellaire, le théorème du viriel prend donc la forme

$$2\overline{T} + \overline{W} = 0.$$

Le théorème du viriel peut être utilisé pour estimer l'ordre de grandeur des vitesses des étoiles d'un système stellaire ayant atteint un état stationnaire. Supposons-le composé de N étoiles de même masse m , réparties uniformément dans une sphère de rayon R . Nous simplifierons le calcul de W en remplaçant les N étoiles de masse m par une distribution continue de la masse $M = Nm$. La densité est donc $\rho = 3M/4\pi R^3$ et l'énergie potentielle

$$W = - \int_0^M \frac{GM(r) dM(r)}{r} = -\frac{3GM^2}{5R}.$$

En négligeant un facteur numérique sans importance, le théorème du viriel nous donne

$$\overline{v^2} \approx \frac{GM}{R}.$$

On peut alors estimer le temps nécessaire à la traversée du système stellaire (*crossing time*),

$$\tau_{cross} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \approx \tau_{dyn}.$$

En substituant dans cette relation la masse estimée de la Galaxie, $M = 10^{11} M_{\odot}$, et la distance du Soleil au centre galactique, $R = 8,5$ kpc, on obtient une estimation de la vitesse de 225 km s^{-1} .

5.5 Instabilité de Jeans dans un fluide

On invoque l'instabilité gravitationnelle (ou instabilité de Jeans) d'une masse gazeuse comme événement initiateur de la contraction qui conduit à la formation d'une galaxie ou d'une étoile. Considérons un milieu fluide, homogène et infini, à l'équilibre. Un tel système est une fiction (l'équation de Poisson implique une densité nulle), mais l'analyse de stabilité qu'on en fait est instructive. Le raisonnement pourrait être rendu plus rigoureux au prix d'une complication du calcul. Pour étudier l'évolution d'une petite perturbation de ce système, la forme linéarisée des équations habituelles de l'hydrodynamique suffit. En désignant par X' la perturbation eulérienne d'une grandeur X quelconque, elles s'écrivent de la façon suivante.

$$\begin{aligned} \text{Équation de continuité} & \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}') = 0, \\ \text{équation de mouvement} & \quad \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } P' + \frac{\rho'}{\rho^2} \text{grad } P - \text{grad } \Phi', \\ \text{équation de Poisson} & \quad \Delta \Phi' = 4\pi G \rho'. \end{aligned}$$

Les coefficients de ces équations sont indépendants de \vec{r} et t . Elles admettent donc des solutions $\propto \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \sigma t)]$. Il vient alors

$$\begin{aligned} -i\sigma \rho' + i\rho \vec{k} \cdot \vec{v}' &= 0, \\ -i\sigma \vec{v}' &= -\frac{i\vec{k} P'}{\rho} - i\vec{k} \Phi', \\ -k^2 \Phi' &= 4\pi G \rho'. \end{aligned}$$

Nous supposons en outre que les perturbations considérées sont adiabatiques,

$$P' = c^2 \rho',$$

où c est la vitesse du son. On obtient aisément la relation de dispersion

$$\sigma^2 = k^2 c^2 - 4\pi G \rho.$$

On voit que la perturbation considérée est instable ($\sigma^2 < 0$) si

$$k^2 < \frac{4\pi G \rho}{c^2} \quad \text{ou} \quad \lambda > c \sqrt{\frac{\pi}{G \rho}} \approx c \tau_{dyn} = \text{longueur de Jeans}.$$

Les perturbations ayant une longueur caractéristique supérieure à la longueur de Jeans sont instables. On peut formuler cet énoncé sous la forme équivalente : une instabilité se manifeste à une échelle λ si le temps dynamique est inférieur au temps nécessaire à une onde acoustique pour parcourir la longueur λ .

Chapitre 6

Potentiel des systèmes sphériques

L'étude des potentiels à symétrie sphérique ne présente pas de difficulté. Dans ces systèmes, la densité dépend seulement de la distance r au centre du système, soit $\rho(r)$, et le potentiel possède évidemment la même symétrie, soit $\Phi(r)$. L'équation de Poisson se réduit à

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad \text{et} \quad F = -\frac{Gm}{r^2},$$

où $m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr'$ est la masse contenue dans la sphère de rayon r et F la composante radiale de la force s'exerçant sur une masse unitaire (les autres composantes sont nulles).

$$\Phi = - \int_r^\infty \frac{Gm}{r'^2} dr'.$$

On notera que la vitesse circulaire $v_c(r)$, c'est-à-dire la vitesse d'une particule ayant pour trajectoire un cercle de rayon r centré sur l'origine, est donnée par

$$v_c(r) = \sqrt{r \frac{d\Phi}{dr}} = \sqrt{\frac{Gm}{r}}.$$

L'intégrale d'énergie donne aisément la vitesse d'échappement $v_e(r)$,

$$v_e(r) = \sqrt{-2\Phi(r)}.$$

On peut calculer de la façon suivante l'énergie potentielle gravifique d'une configuration sphérique.

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \rho \Phi dV = \frac{1}{2} \int \Phi dm = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Phi \frac{dm}{dr} dr = -\frac{1}{2} \int_0^\infty m \frac{d\Phi}{dr} dr \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{Gm^2}{r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty Gm^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) dr = - \int \frac{Gm dm}{r}. \end{aligned}$$

Il est instructif de discuter les potentiels générés par quelques distributions simples de masse. Le point central massif et la sphère homogène constituent des cas extrêmes entre lesquels se situeront les modèles réalistes de systèmes sphériques.

6.1 Le point central massif

C'est le problème de Kepler, qui est abordé dans les cours élémentaires de mécanique.

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}, \quad v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \quad v_e(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

6.2 La sphère homogène

Considérons une sphère homogène de rayon R et de densité ρ .

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho & \text{si } r < R, \\ M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G\rho \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right) & \text{si } r < R, \\ -\frac{GM}{r} = -\frac{4\pi R^3 G\rho}{3r} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On notera que pour $r < R$, le potentiel est le même que celui d'un oscillateur harmonique et

$$v_c(r) = r\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}}.$$

Le temps τ nécessaire au parcours d'une orbite est donc

$$\tau = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \approx \tau_{dyn},$$

indépendant du rayon de l'orbite.

6.3 Potentiel isochrone

Si la densité d'un système sphérique est à peu près constante dans les régions centrales et décroît rapidement à grande distance, son potentiel, à une constante additive près, sera approximativement proportionnel à r^2 au voisinage du centre et à r^{-1} pour les grandes valeurs de r . Le potentiel isochrone possède cette propriété. Il s'écrit

$$\Phi = -\frac{GM}{a + \sqrt{a^2 + r^2}},$$

où M est la masse totale de la configuration et a une constante ayant la dimension d'une longueur. On calcule aisément

$$m(r) = \frac{Mr^3}{(a + \sqrt{a^2 + r^2})^2 \sqrt{a^2 + r^2}},$$

$$v_c^2 = \frac{GMr^2}{(a + \sqrt{a^2 + r^2})^2 \sqrt{a^2 + r^2}}.$$

On notera que pour les grandes valeurs de r , on a

$$v_c \approx \sqrt{GM/r}.$$

La densité est donnée par

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi Gr^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{Ma(2r^2 + 3a\sqrt{a^2 + r^2} + 3a^2)}{4\pi(a + \sqrt{a^2 + r^2})^3(a^2 + r^2)^{3/2}}.$$

La densité centrale est

$$\rho(0) = \frac{3M}{16\pi a^3}$$

et, à grande distance,

$$\rho(r) \approx \frac{Ma}{2\pi r^4}.$$

6.4 Potentiel de Hubble modifié

Nous avons vu que la loi de Hubble-Reynolds décrivait approximativement la brillance des images de galaxies elliptiques. Si l'émissivité (puissance émise par unité de volume) dans un système sphérique est distribuée suivant une loi du type

$$\epsilon(r) = \epsilon_0 \left[1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-3/2},$$

la distribution de brillance dans l'image est donnée par la loi de Hubble modifiée,

$$I(R) = \frac{2\epsilon_0 a}{1 + (R/a)^2},$$

qui ne diffère pas beaucoup de la loi de Hubble-Reynolds.

Considérons donc une distribution de densité de la même forme que la loi d'émissivité décrite ci-dessus,

$$\rho(r) = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

On en déduit

$$m(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \left\{ \operatorname{arcsch} \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right\}.$$

Malgré la divergence logarithmique de la masse pour les grandes valeurs de r , le potentiel

$$\Phi(r) = -\frac{Gm(r)}{r} - \frac{4\pi G\rho_0 a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

reste fini lorsque $r \rightarrow \infty$.

6.5 Profil de densité en loi de puissance

Considérons un système dont la densité suit la loi de puissance

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{a}{r}\right)^\alpha.$$

On notera que pour garder une masse finie dans les régions centrales, on doit exiger $\alpha < 3$. On calcule aisément

$$\begin{aligned} m(r) &= \frac{4\pi\rho_0 a^3}{3-\alpha} \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha-3}, \\ v_c^2 &= \frac{4\pi G\rho_0 a^\alpha r^{2-\alpha}}{3-\alpha}. \end{aligned}$$

L'observation montre que les courbes de rotation sont remarquablement plates dans les régions externes des galaxies. Ceci suggère que la distribution de masse dans ces régions pourrait être assez bien décrite par une loi de puissance avec $\alpha = 2$. Cette valeur correspond précisément au modèle de la sphère isotherme singulière (voir plus loin).

La masse diverge aux grandes valeurs de r pour toutes les valeurs de $\alpha \leq 3$. Toutefois, ce n'est pas le cas du potentiel si $2 < \alpha < 3$,

$$\Phi = -\frac{4\pi G\rho_0 a^\alpha r^{2-\alpha}}{(\alpha-2)(3-\alpha)}.$$

6.6 Modèle de Plummer

Dans ce modèle, le potentiel s'écrit

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}},$$

où M est la masse totale et b une constante ayant la dimension d'une longueur. On calcule aisément

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3Mb^2}{4\pi(r^2 + b^2)^{5/2}}, \\ m &= \frac{Mr^3}{(r^2 + b^2)^{3/2}}, \\ v_c^2 &= \frac{GMr^2}{(r^2 + b^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

On notera qu'à grande distance, $\rho \propto r^{-5}$. Il décrit relativement bien les amas globulaires mais ne convient pas aux galaxies elliptiques dont la densité décroît moins vite que r^{-4} à grande distance.

Exercice

Dessinez la courbe de rotation $v_c(r)$ des systèmes décrits ci-dessus.

Chapitre 7

Potentiel des systèmes à symétrie de révolution

Un certain nombre de systèmes stellaires possèdent une symétrie de révolution approximative ainsi qu'une symétrie par rapport à un plan équatorial. Les coordonnées cylindriques sont souvent bien indiquées pour étudier ce type de problème. La densité et le potentiel sont indépendants de la coordonnée azimutale ϕ et sont des fonctions paires de z . L'équation de Poisson se réduit à

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho.$$

On montre aisément que ce potentiel admet des orbites planes situées dans le plan équatorial. Parmi celles-ci, existent des orbites circulaires parcourues à la vitesse constante v_c , donnée par

$$v_c = \sqrt{R \frac{d\Phi}{dR}}.$$

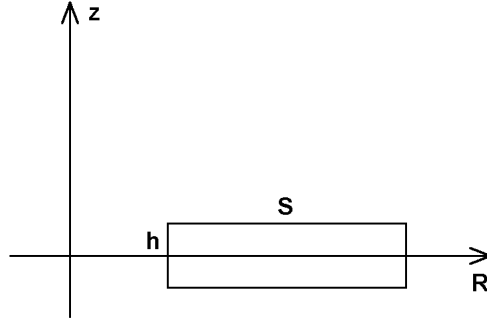
Le calcul du potentiel généré par une distribution de matière d'expression simple est généralement une tâche difficile qui conduit souvent à des formules compliquées faisant intervenir des fonctions spéciales. Il est en général beaucoup plus simple de se donner un potentiel et d'en déduire, à l'aide de l'équation de Poisson, la densité correspondante. Encore faut-il que la densité ainsi déduite soit réaliste. Décrivons quelques potentiels simples utilisés pour modéliser les systèmes stellaires.

7.1 Disque de Kuzmin

Considérons le potentiel

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + |z|)^2}}.$$

Pour $z > 0$, il coïncide avec le potentiel généré par un point de masse M situé en $R = 0$ et $z = -a$. On a donc $\Delta\Phi = 0$ pour $z > 0$. Un argument analogue montre qu'on a

FIG. 7.1 – Calcul de la densité superficielle Σ .

également $\Delta\Phi = 0$ pour $z < 0$. Le potentiel considéré est donc généré par une distribution superficielle de masse dans le plan $z = 0$. Le théorème de Gauss permet d'évaluer la densité superficielle Σ correspondante. Considérons un petit cylindre de surface S , de génératrices parallèles à l'axe z , de hauteur infiniment petite h et dont les bases sont situées de part et d'autre du plan $z = 0$ (voir figure 7.1). L'application du théorème de Gauss donne

$$S(F_{z+} - F_{z-}) = -4\pi Gm \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_- = 4\pi G\Sigma,$$

où les indices $+$ et $-$ désignent les valeurs limites des grandeurs indicées en $z = 0$ des côtés $z > 0$ et $z < 0$ respectivement. Il vient finalement

$$\Sigma(R) = \frac{Ma}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}.$$

7.2 Potentiel de Miyamoto et Nagai

Miyamoto et Nagai ont considéré la famille de potentiels

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}.$$

La densité correspondante s'écrit

$$\rho = \frac{Mb^2}{4\pi} \frac{\left\{ aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 \right\}}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 \right]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Il est intéressant de noter que pour $a = 0$ on retrouve le modèle de Plummer alors que pour $b = 0$ on retrouve le disque de Kuzmin. Lorsque $b/a \approx 0,2$, les contours d'égale densité s'accordent qualitativement à la distribution de lumière dans une galaxie spirale. Quantitativement, l'accord est moins bon car dans le modèle considéré $\rho(R, 0) \propto R^{-3}$

pour les grandes valeurs de R alors que dans une galaxie spirale, la décroissance est exponentielle.

Exercice

Au voisinage du plan équatorial des systèmes fortement aplatis, le terme $\partial^2\Phi/\partial z^2$ domine le premier membre de l'équation de Poisson de telle sorte qu'en première approximation on peut l'écrire

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 4\pi G\rho.$$

Dans le cas extrême d'un disque, $\partial^2\Phi/\partial z^2$ devient singulier en $z = 0$. Montrez explicitement que ce terme devient dominant dans le cas d'un potentiel de Miyamoto et Nagai lorsque le paramètre b est proche de zéro.

7.3 Potentiel logarithmique

Pour obtenir une courbe de vitesse circulaire approximativement constante pour les grandes valeurs de R , comme on en observe dans les galaxies spirales, on doit avoir $d\Phi/dR \propto 1/R$ et par conséquent $\Phi \propto \ln R$. On utilise souvent un potentiel de la forme

$$\Phi = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left(R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) \quad \text{avec } 0 < q \leq 1,$$

où R_c , v_0 et q sont des constantes. La vitesse circulaire est donnée par

$$v_c = \frac{Rv_0}{\sqrt{R_c^2 + R^2}}.$$

Elle tend vers v_0 pour les grandes valeurs de R . La densité s'écrit

$$\rho = \frac{v_0^2}{4\pi Gq^2} \frac{(2q^2 + 1)R_c^2 + R^2 + \left(2 - \frac{1}{q^2}\right)z^2}{\left(R_c^2 + R^2 + \frac{z^2}{q^2}\right)^2}.$$

On doit prendre $q \geq \sqrt{2}/2 \approx 0,7$ si on veut éviter que la densité devienne négative pour les grandes valeurs de z .

7.4 Systèmes sphéroïdaux

Les systèmes dont les surfaces d'égale densité sont des sphéroïdes (ellipsoïdes de révolution) homothétiques présentent un intérêt particulier pour la description des galaxies elliptiques. Le calcul du potentiel de ces configurations peut être mené à bien dans un système de coordonnées sphéroïdal. Toutefois cette étude demande des développements trop longs pour trouver place dans ce cours.

7.5 Potentiels des disques

Le potentiel recherché doit satisfaire l'équation de Laplace dans tout l'espace sauf sur le plan $z = 0$. Des conditions limites en $z = 0$ relient le potentiel Φ et la densité superficielle Σ . On recherche des solutions simples de l'équation de Poisson sous forme séparée

$$\Phi(R, z) = J(R)Z(z).$$

L'équation de Poisson se sépare, il vient

$$\frac{1}{J} \frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dJ}{dR} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2.$$

On obtient

$$Z = S e^{\pm kz}$$

et, en posant $u = kR$,

$$\frac{d^2 J}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dJ}{du} + J = 0.$$

La solution de cette équation de Bessel, régulière en $u = 0$, est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, $J_0(u)$. On a donc

$$\Phi(R, z) = S e^{\pm kz} J_0(kR).$$

On exigera que Φ s'annule à l'infini et soit symétrique par rapport au plan équatorial. On écrira donc

$$\Phi(R, z) = S e^{-k|z|} J_0(kR).$$

A cette solution correspond la densité Σ donnée par

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0+} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0-} = 4\pi G \Sigma,$$

soit

$$\Sigma(R) = -\frac{kS J_0(kR)}{2\pi G}.$$

La solution la plus générale s'obtient par superposition des solutions séparées

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(k) e^{-k|z|} J_0(kR) dk$$

et la densité correspondante s'écrit

$$\Sigma(R) = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty S(k) J_0(kR) k dk.$$

La dernière relation peut être inversée (voir note sur les transformées de Hankel) et il vient

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR) \Sigma(R) R dR.$$

Une grandeur particulièrement intéressante est la vitesse circulaire $v_c(R)$, elle est donnée par

$$v_c^2(R) = R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_{z=0} = -R \int_0^\infty S(k) J_1(kR) k dk.$$

Disque de Mestel

Mestel a étudié les propriétés d'un disque dont la densité superficielle est donnée par

$$\Sigma(R) = \frac{\Sigma_0 R_0}{R}.$$

La masse contenue à l'intérieur d'un disque de rayon R est donnée par

$$m(R) = 2\pi \int_0^R \Sigma(R) R dR = 2\pi \Sigma_0 R_0 R.$$

Elle diverge à l'infini. On calcule aisément

$$S(k) = -2\pi G \Sigma_0 R_0 \int_0^\infty J_0(kR) dR = -\frac{2\pi G \Sigma_0 R_0}{k}.$$

Le potentiel ne peut être calculé directement à l'aide de l'expression vue plus haut car l'intégrale diverge. Par contre, on détermine aisément la vitesse circulaire,

$$v_c^2 = 2\pi G \Sigma_0 R_0 R \int_0^\infty J_1(kR) dk = 2\pi G \Sigma_0 R_0.$$

On notera que la vitesse circulaire d'un disque de Mestel est constante et qu'elle peut être exprimée de la même façon que pour un système sphérique (en remplaçant r par R),

$$v_c^2 = \frac{Gm(R)}{R}.$$

A partir de $v_c^2 = R(\partial\Phi/\partial R)_{z=0}$, on peut déterminer le potentiel dans le disque,

$$\Phi(R, 0) = 2\pi G \Sigma_0 R_0 \ln R + cte = v_c^2 \ln R + cte.$$

Disque exponentiel

La densité superficielle d'un disque exponentiel est donnée par

$$\Sigma(R) = \Sigma_0 e^{-R/R_d}.$$

La masse contenue dans un disque de rayon R est donnée par

$$m(R) = 2\pi R_d^2 \Sigma_0 \left[1 - \left(1 + \frac{R}{R_d} \right) e^{-R/R_d} \right].$$

En développant la fonction de Bessel figurant dans l'expression de $S(k)$ en série de puissances et en intégrant terme à terme, on obtient

$$S(k) = -\frac{2\pi G \Sigma_0 R_d^2}{[1 + (kR_d)^2]^{3/2}}.$$

Le calcul peut être poursuivi, on obtient ainsi les expressions analytiques du potentiel dans le plan équatorial et la vitesse circulaire. On consultera l'ouvrage de Binney et Tremaine (1987) pour plus de détails. La figure 7.2 suivante montre l'allure de $v_c(R)$.

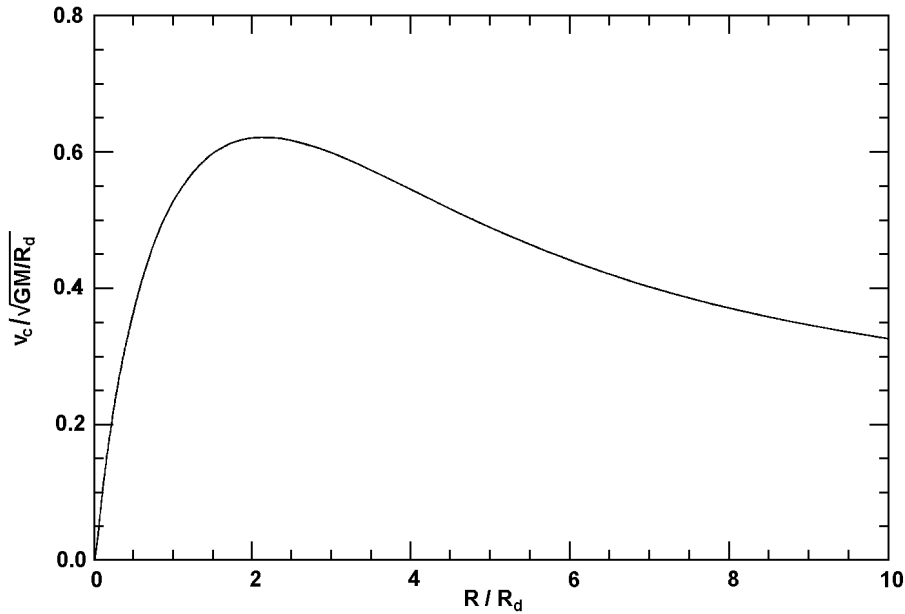


FIG. 7.2 – Courbe de rotation $v_c(R)$ du disque exponentiel.

7.6 Bref rappel sur les fonctions de Bessel

L'équation de Bessel d'ordre ν s'écrit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$ et $J_{-\nu}(x)$ sont solutions de l'équation. Le développement en série de puissances de $J_\nu(x)$ s'écrit

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}.$$

Pour n entier, on a

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Citons quelques propriétés utilisées dans le cours.

$$2 \frac{dJ_\nu(x)}{dx} = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x).$$

En particulier,

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x).$$

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$

$$\int_0^\infty J_\nu(x) dx = 1 \quad \text{pour } \nu > -1.$$

Pour les grandes valeurs de x , on a

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Pour $\nu \geq -1/2$ et pour autant que les expressions aient un sens,

$$\int_0^\infty J_\nu(yz)y dy \int_0^\infty J_\nu(xy)f(x)x dx = f(z).$$

On peut l'exprimer de façon équivalente en disant que si $g(y)$ est la transformée de Hankel de $f(x)$,

$$g(y) = \int_0^\infty f(x)J_\nu(xy)x dx,$$

alors $f(x)$ est la transformée de $g(y)$,

$$f(x) = \int_0^\infty g(y)J_\nu(xy)y dy.$$

Références

L'équation de Poisson est linéaire. Cette circonstance permet d'obtenir de nouveaux couples (ρ, Φ) par des opérations linéaires (combinaisons linéaires, dérivation par rapport aux paramètres) sur les couples décrits ci-dessus. On consultera l'ouvrage de Binney et Tremaine (1987) pour des informations complémentaires ainsi que l'article de Robijn et Earn (1996).

On trouvera la théorie du potentiel des systèmes ellipsoïdaux dans les livres de Ramsey (1961) et de Chandrasekhar (1969). Pour le cas des systèmes sphéroïdaux, on pourra se référer à Schmidt (1956).

Binney et Tremaine (1987) décrivent une autre approche du calcul du potentiel d'un disque faisant appel aux intégrales elliptiques. On pourra également consulter Pichon et Lynden-Bell (1996).

Binney J., Tremaine S., 1987. Galactic dynamics. Princeton University Press.

Chandrasekhar S., 1969. Ellipsoidal figures of equilibrium. Yale University Press.

Pichon C., Lynden-Bell D., 1996. Equilibria of flat and round galactic discs. Month Not Roy Astron Soc, 282, 1143–1158.

Ramsey A.S., 1961. An introduction to the theory of Newtonian attraction. Cambridge University Press.

Robijn F.H.A., Earn D.J.D., 1996. Potential-density basis sets in axisymmetric coordinates. Month Not Roy Astron Soc, 282, 1129–1142.

Schmidt M., 1956. A model of the distribution of mass in the galactic system. Bull Astron Inst Netherlands, 13, 15–41.

Chapitre 8

Modèles de masse de la Galaxie

Les données photométriques et les comptages d'étoiles fournissent des indications précieuses sur la distribution des masses dans la Galaxie. Mais c'est le champ gravifique créé par cette distribution qui révèle le mieux la structure de la Galaxie. La courbe de rotation $v_c(R)$ fournit la composante radiale du champ gravitationnel dans le plan galactique. Malheureusement, on connaît beaucoup moins bien la composante perpendiculaire.

Les lacunes dans la connaissance du champ gravifique nous empêchent d'en déduire, par l'équation de Poisson, la distribution de densité. Aussi se contente-t-on de construire des modèles de masse de la Galaxie en assemblant un nombre restreint de composantes de forme connue, du type de celles qui ont été étudiées dans les chapitres précédents, et d'ajuster les paramètres pour rendre compte au mieux des données d'observation et particulièrement de la courbe de rotation.

Nous avons déjà signalé que la vitesse circulaire $v_c(R)$ était relativement constante dans les zones externes de la Galaxie. Bien que les mesures n'aient pas été effectuées au-delà d'environ 15 kpc, l'observation des autres galaxies suggère que cette tendance pourrait se prolonger bien au-delà. Une vitesse de rotation constante implique l'existence d'une distribution de matière dont la densité varie comme r^{-2} . Rappelons que la densité du disque décroît exponentiellement et que celle du halo (halo stellaire ou halo visible) décroît comme r^{-3} ou $r^{-3,5}$. Il faut donc faire appel à une composante supplémentaire, la couronne (ou halo obscur), dont la densité décroît comme r^{-2} (décroissance caractéristique de la sphère isotherme, voir plus loin). Cette couronne n'est pas observée, nous ne connaissons donc ni sa forme ni son étendue. Elle doit contribuer très peu à la densité dans le voisinage solaire. De nombreuses suggestions ont été faites quant à sa nature qui nous est inconnue : particules élémentaires connues ou inconnues, naines brunes, corps de la taille des planètes géantes, trous noirs. Toutefois, la poussière est exclue car elle obscurcirait les étoiles distantes.

Les premiers modèles de la Galaxie (comme celui de Schmidt, 1956) ont été conçus à une époque où on ne savait pas encore que la vitesse de rotation était relativement constante aux grandes valeurs de R . Ils n'incluent donc pas de couronne et ne sont plus d'aucune utilité aujourd'hui. Les modèles actuels incluent au moins trois composantes : un disque (généralement exponentiel, parfois avec un trou central, il correspond à la population I), un sphéroïde (il suit habituellement une loi de Hubble ou une loi de de Vaucouleurs et décrit la

population II) et une couronne (pour produire une courbe de rotation approximativement plate aux grandes distances). La construction des modèles repose sur deux méthodologies différentes : ajustement à une distribution de luminosité obtenue par comptage d'étoiles (Bahcall, Schmidt et Soneira 1982) ou ajustement à diverses mesures du champ de force galactique (Caldwell et Ostriker 1981, Rohlfs et Kreitschmann 1988, Dehnen et Binney 1998). Nous décrivons brièvement ci-dessous deux modèles qui servent encore assez souvent de référence.

8.1 Modèle de Caldwell et Ostriker (1981)

Ce modèle est constitué d'un disque, d'un halo et d'une couronne.

Le disque est caractérisé par une densité superficielle

$$\Sigma = \Sigma_D (e^{-R/R_D} - e^{-R/R_G}) .$$

Le halo obéit à une loi de Hubble-Reynolds, sa densité est donnée par

$$\rho = \begin{cases} \frac{3,75\rho_S}{\xi^2} \left[\frac{3-\xi}{\sqrt{\xi}} \ln \frac{1+\sqrt{\xi}}{\sqrt{1-\xi}} - 3 \right] & \text{si } r < r_S, \\ \rho_S & \text{si } r = r_S, \\ \frac{3,75\rho_S}{\xi^2} \left[\frac{3+\xi}{\sqrt{\xi}} \operatorname{arctg} \sqrt{\xi} - 3 \right] & \text{si } r > r_S, \end{cases}$$

où $\xi = \left| \left(\frac{r}{r_S} \right)^2 - 1 \right|$. Pour les grandes valeurs de r , la densité du halo décroît comme r^{-3} .

La densité de la couronne suit la loi

$$\rho = \frac{\rho_C}{1 + (r/r_C)^2} \quad \text{si } r < 150 \text{ kpc.}$$

Les 8 paramètres R_0 (distance galactocentrique du Soleil), Σ_D , R_D , R_G , ρ_S , r_S , ρ_C et r_C ont été déterminés de façon à satisfaire au mieux 13 contraintes observationnelles de nature essentiellement cinématique (distance au centre galactique, constantes de Oort, vitesses circulaires en différents points, vitesse d'échappement, ...). Les valeurs retenues sont les suivantes :

$$\begin{aligned} R_0 &= 9,0656 \text{ kpc} , \\ \Sigma_D &= 1,0276 \cdot 10^5 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-2} , \\ R_D &= 2,52591 \text{ kpc} , \\ R_G &= 2,52382 \text{ kpc} , \\ \rho_S &= 132,23 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3} , \\ r_S &= 0,10312 \text{ kpc} , \\ \rho_C &= 1,3720 \cdot 10^{-2} \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-3} , \\ r_C &= 7,8151 \text{ kpc} . \end{aligned}$$

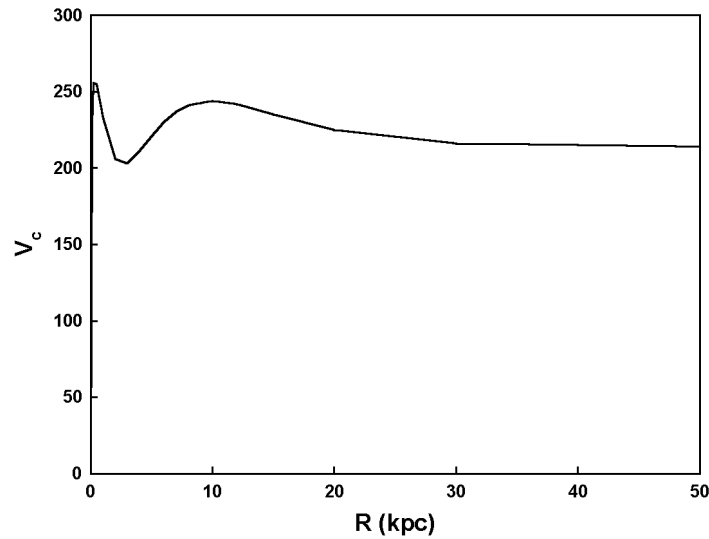


FIG. 8.1 – Courbe de rotation du modèle de Caldwell et Ostriker (1981).

Mentionnons également les quelques caractéristiques suivantes du modèle :

$$\begin{aligned}
 A &= 12,8 \text{ km s}^{-1}\text{kpc}^{-1}, \\
 B &= -14,0 \text{ km s}^{-1}\text{kpc}^{-1}, \\
 v_0 &= 243 \text{ km s}^{-1}, \\
 v_{e0} &= 605 \text{ km s}^{-1},
 \end{aligned}$$

où v_{e0} est la vitesse d'échappement au niveau du Soleil,

$$\begin{aligned}
 M_{\text{disque}} &= 6,6 \cdot 10^{10} M_{\odot}, \\
 M_{\text{halo}} &= 6,4 \cdot 10^{10} M_{\odot}, \\
 M_{\text{couronne}} &= 1,45 \cdot 10^{12} M_{\odot}.
 \end{aligned}$$

La courbe de vitesse de rotation $v_c(R)$ du modèle est donnée par la figure 8.1.

8.2 Modèle de Bahcall, Schmidt et Soneira (1982)

La construction de ce modèle, contrairement au précédent, repose essentiellement sur des comptages d'étoiles et des mesures photométriques. Dans chaque composante, on suppose connu le rapport masse/luminosité ($5 M_{\odot}/L_{\odot}$ pour le disque et $9 M_{\odot}/L_{\odot}$ pour le sphéroïde) et la distribution de luminosité est convertie en distribution de masse. Il fait appel à une couronne invisible pour rendre compte de la courbe de rotation. Le modèle comprend 4 composantes : un disque, une distribution centrale de masse que nous appellerons bulbe, un halo et une couronne. Les auteurs adoptent $R_0 = 8 \text{ kpc}$ comme distance du centre galactique.

La densité du disque obéit à une loi exponentielle,

$$\rho = \rho_D(R_0)e^{-|z|/h}e^{-(R-R_0)/R_D},$$

avec

$$\begin{aligned} R_d &= 3,5 \text{ kpc}, \\ h &\text{ entre } 100 \text{ et } 300 \text{ pc}, \\ \rho_D(R_0) &= 0,15 \text{ M}_\odot\text{pc}^{-3}. \end{aligned}$$

Le bulbe est décrit par la densité

$$\rho = \rho_C \alpha^{-1,8} e^{-(r/r_C)^3},$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{R^2 + 6,25z^2} \quad (R \text{ et } z \text{ en pc}), \\ r_C &= 1 \text{ kpc}, \\ \rho_C &= 7,6 \cdot 10^5 \text{ M}_\odot\text{pc}^{-3}. \end{aligned}$$

Le halo obéit à une loi du type de de Vaucouleurs,

$$\rho = \frac{\rho_D(R_0)}{800} \times \begin{cases} 1,25 \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-3/4} e^{-10,093[1 - (r/R_0)^{1/4}]} & \text{si } r \leq 0,03R_0, \\ \left(\frac{r}{R_0}\right)^{-7/8} e^{-10,093[1 - (r/R_0)^{1/4}]} \left[1 - \frac{0,08669}{(r/R_0)^{1/4}}\right] & \text{si } r > 0,03R_0. \end{cases}$$

Dans la couronne, la densité est donnée par

$$\rho = \rho_H(R_0) \left(\frac{a^{1,2} + R_0^{1,2}}{a^{1,2} + r^{1,2}}\right) \times \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq r_H, \\ \left(\frac{r_H}{r}\right)^{1,5} & \text{si } r > r_H, \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} r_H &= 30 \text{ kpc}, \\ a &= 2 \text{ kpc}, \\ \rho_H(R_0) &= 0,009 \text{ M}_\odot\text{pc}^{-3}. \end{aligned}$$

La masse de la Galaxie est distribuée de la façon suivante entre les quatre composantes :

$$\begin{aligned} M_{\text{disque}} &= 5,6 \cdot 10^{10} \text{ M}_\odot, \\ M_{\text{bulbe}} &= 1,1 \cdot 10^{10} \text{ M}_\odot, \\ M_{\text{halo}} &= 0,27 \cdot 10^{10} \text{ M}_\odot, \end{aligned}$$

La masse de la couronne n'est pas convergente, les masses contenues dans des sphères de rayons de 60 et 150 kpc sont données respectivement par

$$\begin{aligned} M_{\text{couronne},60} &= 0,94 \cdot 10^{12} \text{ M}_\odot, \\ M_{\text{couronne},150} &= 1,9 \cdot 10^{12} \text{ M}_\odot. \end{aligned}$$

La courbe de rotation du modèle a l'allure indiquée à la figure 8.2.

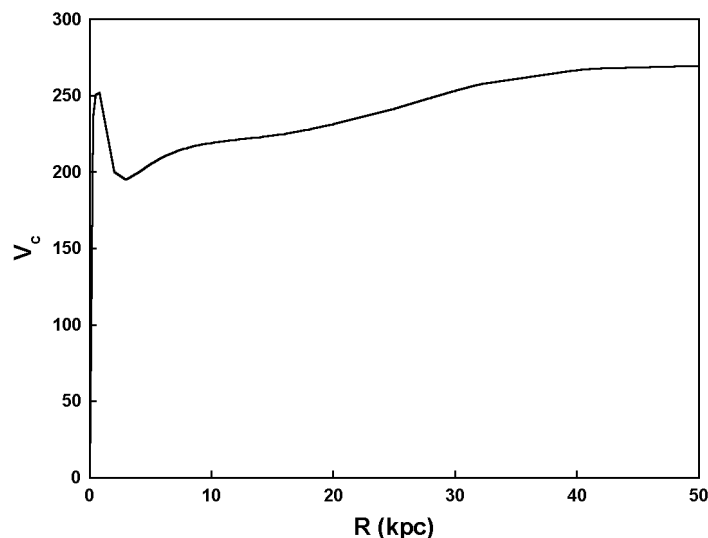


FIG. 8.2 – Courbe de rotation du modèle de Bahcall, Schmidt et Soneira (1982).

Références

Le modèle de Caldwell et Ostriker est décrit dans Caldwell, Ostriker (1981) et celui Bahcall, Schmidt et Soneira est décrit dans les articles de Bahcall et al. (1982 et 1983). Signalons qu'il existe un modèle de Bahcall et Soneira apparenté au modèle de Bahcall, Schmidt et Soneira, il est décrit dans les articles de Bahcall et Soneira (1980 et 1984) et de Bahcall (1986).

Les modèles récents sont toujours constitués des mêmes éléments. Flynn et al. (1996) décrivent un modèle comprenant un disque composé de trois potentiels de Miyamoto-Nagai, un halo composé de deux potentiels de Plummer et une couronne de potentiel logarithmique.

Fich et Tremaine (1991) font le point sur la question de la masse de la Galaxie.

Bahcall J.N., 1986. Star counts and galactic structure. *Ann Rev Astron Astrophys*, 24, 577–611.

Bahcall J.N., Schmidt M., Soneira R.M., 1982. On the interpretation of rotation curves measured at large galactocentric distances. *Ap J*, 258, L23–L27.

Bahcall J.N., Schmidt M., Soneira R.M., 1983. The galactic spheroid. *Ap J*, 265, 730–747.

Bahcall J.N., Soneira R.M., 1980. The universe at faint magnitudes. I. Model for the Galaxy and the predicted star counts. *Ap J Suppl*, 44, 73–110.

Bahcall J.N., Soneira R.M., 1984. Comparison of a standard Galaxy model with stellar observations in five fields. *Ap J Suppl*, 55, 67–99.

Caldwell J.A.R., Ostriker J.P., 1981. The mass distribution within our Galaxy : a three component model. *Ap J*, 251, 61–87.

Dehnen W., Binney J., 1998. Mass models of the Milky Way. *Month Not Roy Astron Soc*, 294, 429–438.

- Fich M., Tremaine S., 1991. The mass of the Galaxy. *Ann Rev Astron Astrophys*, 29, 409–445.
- Flynn c., Sommer-Larsen J., Christensen P.R., 1996. Kinematics of the outer stellar halo. *Month Not Roy Astron Soc*, 281, 1027–1032.
- Rohlf K., Kreitschmann J., 1988. Dynamical mass modelling of the Galaxy. *Astron Astrophys*, 201, 51–62.
- Schmidt M., 1956. A model of the distribution of mass in the galactic system. *Bull Astron Inst Netherlands*, 13, 15–41.

Chapitre 9

Orbites dans un potentiel à symétrie sphérique

En coordonnées sphériques, la force s'exerçant sur une masse unitaire s'écrit

$$\vec{F} = -\text{grad } \Phi(r) = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{e}_r = F(r)\vec{e}_r.$$

Le mouvement admet pour intégrales premières, l'énergie totale E et le moment cinétique \vec{L} ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v^2 + \Phi(r) &= E, \\ \vec{r} \wedge \vec{v} &= \vec{L}.\end{aligned}$$

Si $\vec{L} = 0$, le mouvement est rectiligne et son étude est aisée, nous ne nous attarderons pas sur ce cas et supposerons que $\vec{L} \neq 0$. La trajectoire est entièrement contenue dans le plan orthogonal à \vec{L} passant par O . En prenant l'axe Oz parallèle à \vec{L} , le mouvement peut être décrit à l'aide des deux coordonnées r et ϕ . Les intégrales premières s'écrivent alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + \Phi(r) &= E, \\ r^2\dot{\phi} &= L.\end{aligned}$$

On notera que la dernière relation n'est rien d'autre que la loi des aires. Elle permet d'éliminer $\dot{\phi}$ de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} + \Phi(r) = E.$$

Pour simplifier l'écriture on définit le potentiel effectif

$$\Phi_e(r) = \frac{L^2}{2r^2} + \Phi(r).$$

Comme $\dot{r}^2 > 0$, l'équation de conservation de l'énergie fournit l'inéquation $\Phi_e(r) \leq E$, qui permet d'obtenir d'intéressantes indications sur les orbites. Elle montre en particulier

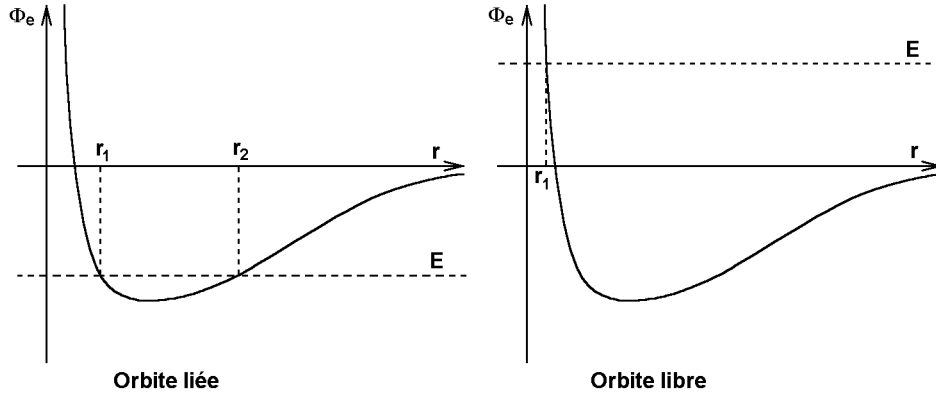


FIG. 9.1 – Extension radiale d'une orbite en fonction de son énergie.

qu'une orbite liée est entièrement contenue dans une couronne de rayon interne r_1 (distance du péricentre) et de rayon externe r_2 (distance de l'apocentre).

Ecrivons à présent les composantes de l'équation de Newton,

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= F(r), \\ 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

Après multiplication par r , la dernière relation s'intègre immédiatement pour fournir la loi des aires déjà écrite plus haut. Transformons la composante radiale de façon à obtenir l'équation de la trajectoire. On effectue les substitutions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{L}{r^2}, \\ \frac{d}{dt} &= \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} = \frac{L}{r^2} \frac{d}{d\phi}. \end{aligned}$$

Il vient

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F(r)}{L^2}.$$

La résolution de cette équation donne la trajectoire.

Dans le cas d'une orbite liée, r varie périodiquement entre r_1 et r_2 . On appelle période radiale le temps τ_r nécessaire pour que l'étoile passe d'un péricentre à un apocentre et retour à un péricentre. On obtient à partir de l'équation de conservation de l'énergie

$$\tau_r = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{2(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

On notera que r_1 et r_2 sont les racines de l'expression se trouvant sous le signe de racine carrée. Au cours d'une période radiale, l'angle azimutal ϕ s'accroît de $\Delta\phi$,

$$\Delta\phi = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr = 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}} dr = 2L \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2(E - \Phi(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}.$$

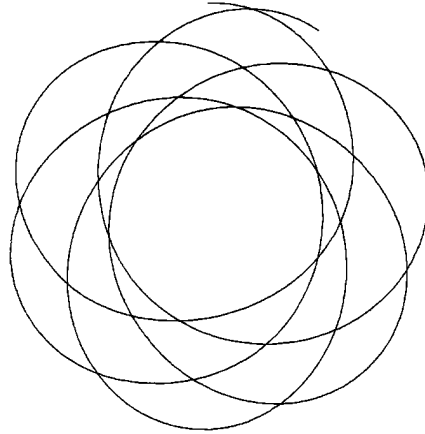


FIG. 9.2 – Orbite en forme de rosette dans un potentiel sphérique (Binney, Tremaine, 1987).

La période azimutale est donc

$$\tau_\phi = \frac{2\pi\tau_r}{\Delta\phi}.$$

En général, $\Delta\phi/2\pi$ est irrationnel et la trajectoire couvre la couronne de rayons r_1 et r_2 de façon dense. Lorsque ce rapport est rationnel, ce qui est exceptionnel, la trajectoire est fermée et le mouvement est périodique. Considérons deux cas extrêmes. Dans le potentiel engendré par un point matériel massif (problème de Kepler), on a $\Delta\phi = 2\pi$ et dans le potentiel engendré par une sphère homogène (oscillateur harmonique), on a $\Delta\phi = \pi$. Les systèmes stellaires sphériques ont des structures intermédiaires entre ces deux extrêmes, on peut donc raisonnablement attendre

$$\pi < \Delta\phi < 2\pi.$$

Exercice

Dans le cas du potentiel isochrone, les expressions intégrales de τ_r et de $\Delta\phi$ peuvent être calculées analytiquement, effectuez le calcul.

Solution. Le changement de variables

$$s = -\frac{GM}{a\Phi} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^2}$$

ramène les expressions à calculer à des intégrales eulériennes. Il vient

$$\tau_r = \frac{2a}{\sqrt{-2E}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{(s-1) ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}},$$

où s_1 et s_2 sont les racines du trinôme

$$2Es^2 + \left(\frac{2GM}{a} - 4E\right)s - \frac{4GM}{a} - \frac{L^2}{a^2} = -2E(s-s_1)(s_2-s).$$

La somme et le produit des racines sont donnés par

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= 2 - \frac{GM}{aE}, \\ s_1 s_2 &= -\frac{2GM}{aE} - \frac{L^2}{2a^2 E}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\tau_r = \frac{2\pi a}{\sqrt{-2E}} \left[\frac{1}{2}(s_1 + s_2) - 1 \right] = \frac{2\pi GM}{(-2E)^{3/2}}.$$

La période radiale est indépendante du moment cinétique, c'est cette propriété qui justifie le nom donné à ce potentiel. On calcule ensuite

$$\Delta\phi = \frac{2L}{a\sqrt{-2E}} \int_{s_1}^{s_2} \frac{(s-1) ds}{s(s-2)\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}}.$$

Pour mener le calcul à bien, on note que

$$\frac{s-1}{s(s-2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-2} \right).$$

Les intégrales à calculer se ramènent à la forme

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{x(1-x)}},$$

dont on obtient la valeur $\pi/\sqrt{\alpha(1+\alpha)}$ en posant $x = \alpha y/(1+\alpha-y)$. On obtient finalement

$$\Delta\phi = \frac{\pi L}{a\sqrt{-2E}} \left[\frac{1}{\sqrt{s_1 s_2}} + \frac{1}{\sqrt{(s_1-2)(s_2-2)}} \right] = \pi \left[1 + \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4GMa}} \right].$$

9.1 Orbites circulaires

Le cas de l'orbite circulaire peut être conçu comme le cas limite où le rayon interne et le rayon externe de la couronne dans laquelle est confinée l'orbite tendent vers la même valeur. L'énergie totale est égale au minimum du potentiel effectif. On a donc

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)_1 - \frac{L^2}{r_1^3} &= 0, \\ \Phi_1 + \frac{L^2}{2r_1^2} &= E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi_1. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'orbite circulaire de rayon r est parcourue à la vitesse constante $v_c(r)$ donnée par

$$v_c^2(r) = \frac{L^2}{r^2} = r \frac{d\Phi}{dr}.$$

Ce résultat s'obtient également à partir des équations de Newton en y faisant $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$.

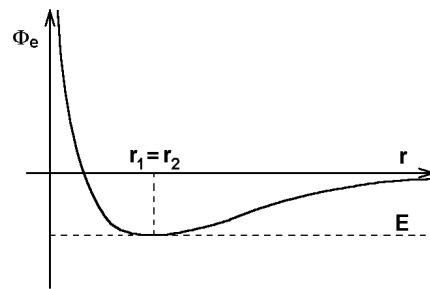


FIG. 9.3 – L'énergie d'une orbite circulaire est égale au minimum du potentiel effectif.

Référence

Binney J., Tremaine S., 1987. Galactic dynamics. Princeton University Press.

Chapitre 10

Orbites dans un potentiel à symétrie de révolution

Considérons à présent un potentiel possédant une symétrie de révolution autour de l'axe z ainsi qu'une symétrie par rapport au plan équatorial (x, y) . En coordonnées cylindriques R, ϕ et z , le potentiel est indépendant de ϕ et est une fonction paire de z . Le mouvement admet pour intégrales premières l'énergie totale E et la composante z du moment cinétique L_z .

$$\frac{1}{2}v^2 + \Phi(R, z) = E,$$

$$(\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z = L_z.$$

En coordonnées cylindriques, ces relations s'écrivent

$$\frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \Phi(R, z) = E,$$

$$R^2\dot{\phi} = L_z.$$

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial R}, \\ 2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi} &= 0, \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Après multiplication par R , la deuxième équation s'intègre immédiatement et rend l'intégrale première L_z .

Ces équations de mouvement admettent des solutions dans le plan équatorial $z = 0$. Ces solutions obéissent à des équations du même type que celles que nous avons rencontrées dans le cas sphérique. L'étude qui précède est entièrement valable et nous ne reviendrons pas sur ce problème.

L'étude des autres mouvements peut être réduite à une étude dans le plan méridien, c'est-à-dire dans le plan des variables R et z , par l'élimination de $\dot{\phi}$ qu'on tire de l'intégrale première L_z . On obtient les équations

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= -\frac{\partial\Phi_e}{\partial R}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\partial\Phi_e}{\partial z},\end{aligned}$$

où le potentiel effectif $\Phi_e(R, z)$ est défini par

$$\Phi_e(R, z) = \Phi(R, z) + \frac{L_z^2}{2R^2}.$$

L'intégrale d'énergie totale peut s'écrire

$$\frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_e(R, z) = E.$$

L'inégalité $\Phi_e(R, z) \leq E$ délimite dans le plan méridien une zone accessible au mouvement. La courbe qui la limite s'appelle courbe de vitesse nulle.

10.1 Intégrales premières, surface de section

L'espace des phases du mouvement dans le plan méridien est de dimension 4, chaque point pouvant être décrit par ses coordonnées R, z, \dot{R} et \dot{z} . Toutefois, du fait de l'existence de l'intégrale première d'énergie, un mouvement donné d'énergie totale E s'effectue entièrement sur la variété de dimension 3 d'équation

$$\frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_e(R, z) = E.$$

S'il existait une intégrale première supplémentaire (ce serait la troisième), un mouvement donné s'effectuerait sur une variété de dimension 2. Nous verrons plus loin que l'existence ou la non existence de cette troisième intégrale première a des conséquences importantes sur la dynamique de notre Galaxie, conséquences accessibles à l'observation. Il est donc important de pouvoir mettre en évidence l'existence éventuelle de cette intégrale première, alors même que nous ne posséderions pas de méthodes analytiques pour la déceler.

Il existe des cas simples où la troisième intégrale première peut être mise en évidence par des méthodes analytiques. C'est le cas notamment si le potentiel est séparé,

$$\Phi(R, z) = \Phi_R(R) + \Phi_z(z).$$

On vérifie alors que l'énergie totale est conservée séparément pour les composantes R et z du mouvement,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{R}^2 + \Phi_R(R) + \frac{L_z^2}{2R^2} &= E_R, \\ \frac{1}{2}\dot{z}^2 + \Phi_z(z) &= E_z.\end{aligned}$$

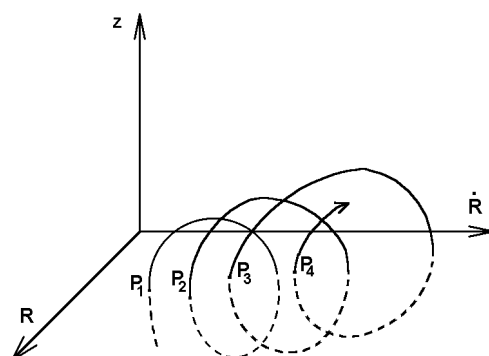


FIG. 10.1 – Construction d’une surface de section.

Dans la plupart des cas toutefois, la question de l’existence d’une troisième intégrale première ne peut être résolue analytiquement et il faut recourir au calcul numérique pour y répondre. Un procédé simple dû à Poincaré, permet de mettre en évidence l’existence d’une troisième intégrale première éventuelle, c’est la méthode de la surface de section (ou section de Poincaré). Dans la variété de dimension 3 définie par l’intégrale d’énergie, il suffit de 3 coordonnées pour repérer un point, soit R , z et \dot{R} . L’intégrale d’énergie permet d’exprimer \dot{z} en fonction des 3 coordonnées choisies (avec une ambiguïté de signe qui ne gênera toutefois pas). Considérons une trajectoire dans cet espace de dimension 3 et notons P_1, P_2, P_3, \dots ses points d’intersection successifs avec le plan $z = 0$ (plan de section), en ne prenant en compte que les intersections avec $\dot{z} > 0$. On notera que par tout point P du plan de section passe une et une seule trajectoire avec $\dot{z} > 0$. Le mouvement associe donc à P un successeur bien défini $P' = T(P)$. L’application T ainsi définie du plan de section dans lui-même est appelée application de Poincaré. On peut donc écrire, pour la suite de points P_i construite ci-dessus,

$$P_2 = T(P_1), \quad P_3 = T(P_2), \dots \quad P_{i+1} = T(P_i).$$

S’il existe une troisième intégrale première I , la trajectoire est entièrement située sur une variété de dimension 2 et les points P_i sont situés sur l’intersection de cette variété avec le plan $z = 0$, c’est-à-dire sur une courbe.

Exercice

Etudiez le problème de Hénon-Heiles (Hénon, Heiles, 1964).

10.2 Mouvements épicycliques

Considérons un potentiel à symétrie axiale avec un plan de symétrie équatorial. On peut aisément étudier de façon approchée les mouvements proches des mouvements circulaires. Cette approche est particulièrement indiquée pour l’étude des étoiles du disque galactique. Considérons un mouvement circulaire de rayon R_c , de moment cinétique L_z , de vitesse v_c

et de fréquence angulaire Ω . Ces grandeurs sont liées par les relations

$$v_c^2 = R_c \left(\frac{d\Phi}{dR} \right)_{R_c} = \frac{L_z^2}{R_c^2},$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{R_c} \left(\frac{d\Phi}{dR} \right)_{R_c} = \frac{L_z^2}{R_c^4}.$$

Considérons maintenant le mouvement d'une étoile P possédant le même L_z . Elle possède également le même potentiel effectif Φ_e . Développons ce potentiel en série de puissances de $x = R - R_c$ et z , en ignorant les termes d'ordre supérieur à 2. Il vient

$$\Phi_e \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial R^2} \right)_{R_c,0} x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial z^2} \right)_{R_c,0} z^2.$$

À cette approximation, nous avons un oscillateur harmonique. Ses mouvements en x et z sont découplés et caractérisés par les fréquences κ et κ_z , appelées respectivement fréquence épicyclique et fréquence verticale.

$$\kappa^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial R^2} \right)_{R_c,0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \right)_{R_c,0} + \frac{3L_z^2}{R_c^4} = \left(R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2 \right)_{R_c},$$

$$\kappa_z^2 = \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial z^2} \right)_{R_c,0} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{R_c,0}.$$

Les équations de mouvement s'écrivent

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0,$$

$$\ddot{z} + \kappa_z^2 z = 0.$$

Ω est à peu près constant au voisinage du centre galactique, ce qui donne $\kappa \approx 2\Omega$. Pour le problème de Kepler, $\Omega \propto R^{-3/2}$ et $\kappa = \Omega$. Dans une galaxie, pour les grandes valeurs de R , $\Omega(R)$ est généralement décroissant, mais pas aussi rapidement que dans le cas keplerien. On a donc en général $\Omega < \kappa < 2\Omega$.

Dans la limite de validité de l'approximation faite, les mouvements admettent trois intégrales premières, L_z et les deux *composantes* de l'énergie, E_R et E_z

$$E_R = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \kappa^2 x^2) \quad \text{et} \quad E_z = \frac{1}{2}(\dot{z}^2 + \kappa_z^2 z^2).$$

La composante radiale du mouvement s'écrit

$$x(t) = X \cos(\kappa t + \psi),$$

où X et ψ sont des constantes arbitraires. La composante azimutale du mouvement se déduit de l'équation

$$\dot{\phi} = \frac{L_z}{R^2} = \frac{L_z}{R_c^2} \left(1 + \frac{x}{R_c} \right)^{-2} \approx \Omega \left(1 - \frac{2x}{R_c} \right).$$

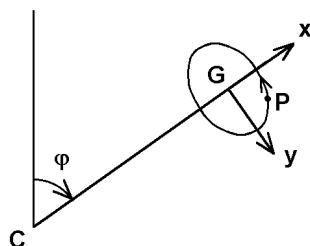


FIG. 10.2 – Mouvement épicyclique.

On obtient

$$\phi = \Omega t + \phi_0 - \frac{2\Omega X}{\kappa R_c} \sin(\kappa t + \psi).$$

Soit G (*guiding center*) l'origine d'un repère local en mouvement circulaire décrit par les relations $R = R_c$ et $\phi = \Omega t + \phi_0$.

Nous avons déjà désigné par x la composante du vecteur \overrightarrow{GP} suivant le vecteur \vec{e}_R et par z la composante de ce vecteur suivant \vec{e}_z . Désignons à présent par y la composante du même vecteur suivant \vec{e}_ϕ . Le mouvement de P dans le repère local est décrit par

$$\begin{aligned} x &= X \cos(\kappa t + \psi), \\ y &= -\frac{2\Omega X}{\kappa} \sin(\kappa t + \psi) = -Y \sin(\kappa t + \psi). \end{aligned}$$

L'étoile décrit donc, dans le repère local, une ellipse appelée épicycle, autour de l'épicentre (le point G), dans le sens rétrograde (c'est-à-dire dans le sens contraire du mouvement de P_0 autour du centre galactique). Le rapport des axes est donné par

$$\frac{X}{Y} = \frac{\kappa}{2\Omega}.$$

L'amplitude de l'épicycle dépend de l'étoile considérée, mais le rapport des axes est entièrement déterminé par la courbe de rotation galactique au voisinage du point considéré. Pour le potentiel keplerien, $X/Y = 1/2$, tandis que pour le potentiel de l'oscillateur harmonique, $X/Y = 1$. On a donc généralement $Y > X$. Au voisinage du Soleil $X/Y \approx 0,7$.

Exercice

Décrivez le mouvement épicyclique rapporté à un repère local en mouvement circulaire différent de celui utilisé ci-dessus. Cas particulier : adoptez celui dont l'origine coïncide avec la position initiale de l'étoile dont on étudie le mouvement.

Application au voisinage solaire

Rappelons que les constantes de Oort sont définies par les expressions suivantes

$$A = -\frac{1}{2}R_0 \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_0 \quad \text{et} \quad B = -\frac{1}{2}R_0 \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_0 - \Omega_0.$$

Au voisinage du Soleil, on peut donc exprimer κ à l'aide de ces constantes,

$$\kappa_0^2 = -4B(A - B) = -4B\Omega_0.$$

On trouve ainsi

$$\kappa_0 = 36 \pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}.$$

On a également

$$\frac{\kappa_0}{\Omega_0} = 2\sqrt{\frac{-B}{A - B}} = 1,3 \pm 0,2.$$

Appliquons les résultats obtenus aux étoiles du voisinage solaire. Nous ne connaissons pas l'épicentre d'une étoile qui passe dans le voisinage solaire. Désignons par R la distance de cet épicentre au centre galactique et comme d'habitude par R_0 la distance du Soleil au centre galactique. Pour l'étoile considérée, on a

$$\begin{aligned} v_\phi - v_c(R_0) &= R_0(\dot{\phi} - \Omega_0) \approx R_0 \left[\Omega(R) - \frac{2x\Omega}{R} - \Omega_0 \right] \\ &\approx -R_0x \left[\frac{2\Omega}{R} + \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} \right] \approx -x \left[2\Omega_0 + R_0 \left(\frac{d\Omega}{dR} \right)_{R_0} \right] = 2Bx. \\ v_R &= \dot{x}. \end{aligned}$$

Pour un échantillon d'étoiles du voisinage solaire, on a donc

$$\begin{aligned} \overline{[v_\phi - v_c(R_0)]^2} &= 4B^2\overline{x^2}, \\ \overline{v_R^2} &= \kappa_0^2\overline{x^2} = -4B(A - B)\overline{x^2}. \end{aligned}$$

On élimine $\overline{x^2}$ (qui n'est évidemment pas accessible à l'observation) entre ces deux relations.

$$\frac{\overline{[v_\phi - v_c(R_0)]^2}}{\overline{v_R^2}} = \frac{-B}{A - B} = \frac{\kappa_0^2}{4\Omega_0^2} \approx 0,45.$$

Cette relation est importante pour la détermination de B .

Référence

Hénon M., Heiles C., 1964. The applicability of the third integral of motion : some numerical experiment. *Astron J*, 69, 73–79.

Chapitre 11

Orbites dans un potentiel plan dépourvu de symétrie de révolution

11.1 Potentiel logarithmique

On utilise souvent le potentiel modèle

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left(R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right) \quad q < 1.$$

Les équipotentiels sont des ellipses homothétiques dont les axes sont dans le rapport q . Pour $R = \sqrt{x^2 + y^2} \ll R_c$, le potentiel se réduit à celui de l'oscillateur harmonique anisotrope de potentiel

$$\Phi(x, y) = \frac{v_0^2}{2R_c^2} \left(x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right) + cte \quad R \ll R_c.$$

Pour $R \gg R_c$ et $q = 1$, la vitesse circulaire est approximativement constante $v_c \approx v_0$.

En simplifiant quelque peu, le potentiel logarithmique admet deux familles d'orbites : les B-orbites (*box orbits*) et les L-orbites (*loop orbits*), illustrées à la figure 11.1. Pour les petites valeurs de l'énergie, c'est-à-dire les mouvements tels que $R \ll R_c$, on peut approximer le potentiel logarithmique par celui de l'oscillateur harmonique. Sauf dans les cas exceptionnels de mouvements périodiques, une orbite couvre un rectangle du plan (x, y) de façon dense. Il s'agit d'une B-orbite. Parmi celles-ci, les mouvements le long des axes constituent des cas limites. Ce sont des mouvements périodiques stables. Dans ce genre de problème, à une orbite périodique stable est toujours associée une famille d'orbites situées dans son voisinage (dans l'espace des phases). L'orbite périodique est appelée orbite parente de la famille. Dans ce sens, les orbites axiales sont les parentes des B-orbites. Pour des énergies plus élevées, il est nécessaire de recourir aux méthodes d'intégration numérique. Au dessus d'une valeur critique de l'énergie, l'orbite axiale le long de l'axe y (le petit axe) devient instable et deux nouvelles orbites périodiques apparaissent, elles ont la même trajectoire, vaguement elliptique, et diffèrent par le sens de parcours. Ces orbites périodiques parentent les L-orbites. La famille des B-orbites continue d'exister,

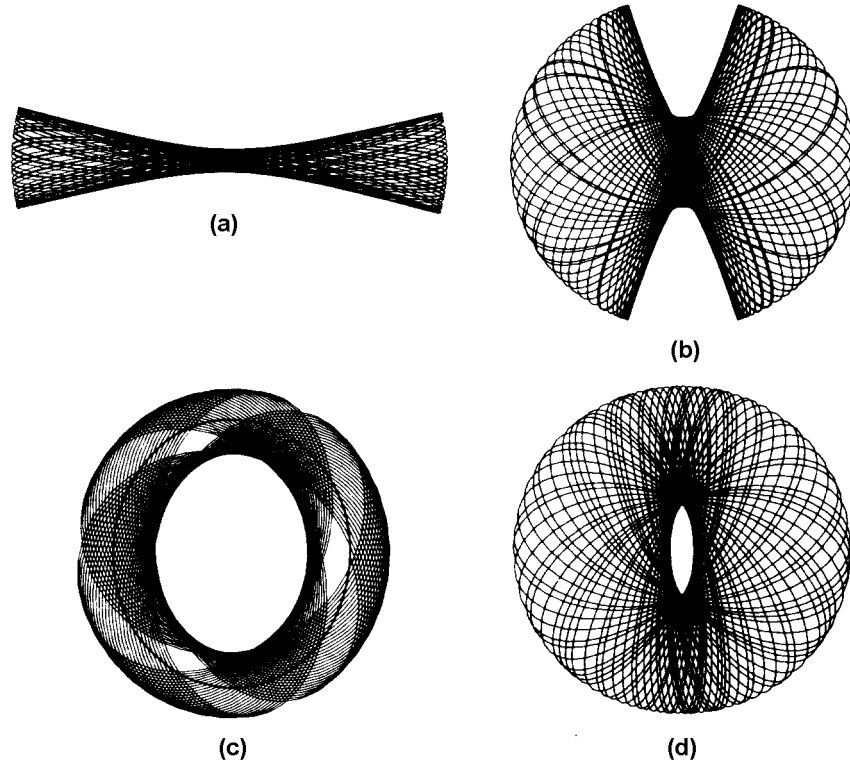


FIG. 11.1 – Orbites de même énergie dans un potentiel logarithmique avec $q = 0.9$: (a) et (b) B-orbites ; (c) et (d) : L-orbites (Binney et Tremaine, 1987).

parentée par l'orbite périodique stable le long de l'axe x (le grand axe). Une L-orbite, sauf cas exceptionnels, couvre de façon dense une région annulaire plus ou moins elliptique et tourne toujours dans le même sens autour de l'origine. Les deux familles de L-orbites correspondent aux deux sens de rotation. On peut construire des surfaces de section comme il a été expliqué précédemment et c'est dans ces surfaces de sections qu'apparaissent le plus clairement les différentes familles d'orbites (figure 11.2).

11.2 Potentiel tournant

Considérons un potentiel stationnaire dans des axes en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\Omega_b > 0$ par rapport à un système d'inertie. On supposera $\Omega_b < v_0/R_c$. Il est alors indiqué d'étudier le mouvement dans ces axes en rotation. L'équation de mouvement s'écrit

$$\vec{\gamma} = -\text{grad } \Phi - \vec{\Omega}_b \wedge (\vec{\Omega}_b \wedge \vec{r}) - 2\vec{\Omega}_b \wedge \vec{v}.$$

Le mouvement admet l'intégrale première de Jacobi, dont nous noterons E la valeur,

$$\frac{1}{2}v^2 + \Phi - \frac{1}{2}|\vec{\Omega}_b \wedge \vec{r}|^2 = E.$$

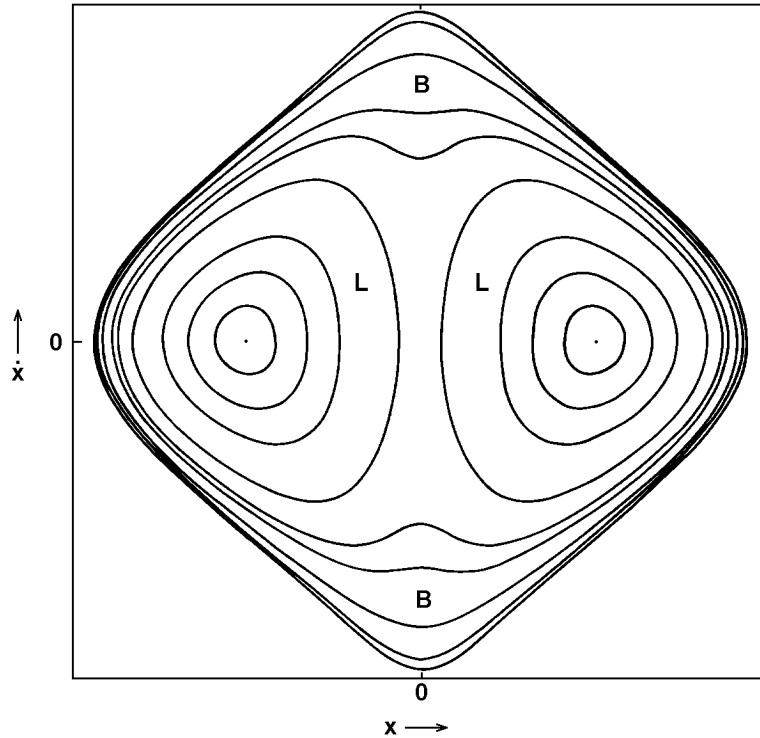


FIG. 11.2 – Surface de section dans le plan (x, \dot{x}) formée par des orbites dans un potentiel logarithmique avec $q = 0,9$ (Binney, Tremaine, 1987).

Il est commode d'utiliser le potentiel effectif

$$\Phi_e = \Phi - \frac{1}{2} |\vec{\Omega}_b \wedge \vec{r}|^2 = \Phi - \frac{1}{2} \Omega_b^2 R^2.$$

Pour fixer les idées prenons pour Φ le potentiel logarithmique défini à la section précédente. Il est aisé de voir que Φ_e possède 5 points stationnaires, $L_1 \dots L_5$, appelés points de Lagrange (figure 11.3).

Les points de Lagrange sont des positions d'équilibre dans les axes en rotation. Dans un repère d'inertie, ils apparaissent en rotation uniforme. La région annulaire comprise entre les trajectoires de L_1 et de L_4 est appelée région de corotation. L_3 est un minimum du potentiel effectif, c'est donc une position d'équilibre stable. L_1 et L_2 sont des cols, L_4 et L_5 des maximums. En présence d'une force dépendant de la vitesse, on ne peut cependant pas déduire la stabilité ou l'instabilité de ces positions d'équilibre à partir de la nature du point stationnaire. L'étude des petits mouvements dans leur voisinage permettra de répondre à cette question.

Posons $x = x_L + \xi$ et $y = y_L + \eta$, les équations de mouvement linéarisées s'écrivent

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\Omega_b \dot{\eta} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} \right)_L \xi &= 0, \\ \ddot{\eta} + 2\Omega_b \dot{\xi} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} \right)_L \eta &= 0. \end{aligned}$$

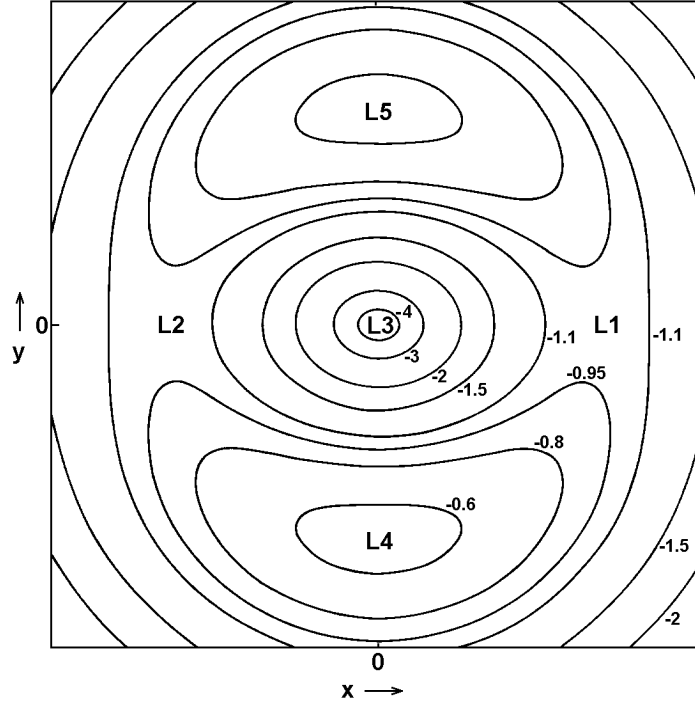


FIG. 11.3 – Contours de potentiel effectif constant dans un potentiel logarithmique tournant et points de Lagrange L_i (Binney, Tremaine, 1987).

Recherchons des solutions de la forme $\xi = \xi_0 \exp(\lambda t)$, $\eta = \eta_0 \exp(\lambda t)$. Il vient l'équation caractéristique

$$\lambda^4 + \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} \right)_L + \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} \right)_L + 4\Omega_b^2 \right] \lambda^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} \right)_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} \right)_L = 0.$$

La position d'équilibre étudiée est stable si les deux racines λ^2 de cette équation sont négatives, ce qui s'exprime par les deux conditions

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} \right)_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} \right)_L &> 0, \\ \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} \right)_L + \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} \right)_L + 4\Omega_b^2 &> 2\sqrt{\left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial x^2} \right)_L \left(\frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial y^2} \right)_L}. \end{aligned}$$

Φ_e possède un minimum au point de Lagrange L_3 et les deux conditions de stabilité sont satisfaites, L_3 est une position d'équilibre stable. Les points L_1 et L_2 sont des cols, ils ne satisfont pas la première condition, ces positions d'équilibre sont instables. Aux points L_4 et L_5 , les conditions de stabilité sont satisfaites dans un certain domaine des paramètres q et $\Omega_b R_c / v_0$. Les orbites voisines des positions d'équilibre stable peuvent être étudiées analytiquement en première approximation. Dans les autres cas, on aura recours aux méthodes numériques. Nous ne décrirons pas la répartition des orbites en différentes familles, elle est plus compliquée que dans le cas précédent.

Exercice

Déterminez les conditions dans lesquelles les points de Lagrange L_4 et L_5 sont stables.

11.3 Barre galactique

Étudions le mouvement dans le potentiel d'une barre galactique faible, en rotation à la vitesse angulaire $\Omega_b > 0$. Dans un système de référence en rotation avec la barre, les équations de mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned}\ddot{R} - R\dot{\phi}^2 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial R} + 2\Omega_b R\dot{\phi} + \Omega_b^2 R, \\ R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi} &= -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} - 2\Omega_b\dot{R},\end{aligned}$$

où la vitesse angulaire Ω_b de la barre est choisie positive. Décomposons le potentiel en une composante symétrique Φ_0 et une petite perturbation Φ_1 ,

$$\Phi(R, \phi) = \Phi_0(R) + \Phi_1(R, \phi).$$

Étudions un mouvement différant peu du mouvement circulaire qui existerait en l'absence de la perturbation,

$$\begin{aligned}R(t) &= R_0 + R_1(t), \\ \phi(t) &= \phi_0(t) + \phi_1(t), \\ \phi_0(t) &= (\Omega_0 - \Omega_b)t,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\Omega(R) &= \pm\sqrt{\frac{1}{R}\left(\frac{d\Phi_0}{dR}\right)} \\ \text{et } \Omega_0 &= \Omega(R_0).\end{aligned}$$

Dans la définition de $\Omega(R)$, le signe plus correspond à une orbite circulaire directe (le sens de rotation est le même que celui de la barre) et le signe moins correspond à une orbite circulaire rétrograde. Au premier ordre, les équations de mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned}\ddot{R}_1 + \left[\left(\frac{d^2\Phi_0}{dR^2}\right) - \Omega^2\right]_{R_0} R_1 - 2\Omega_0 R_0 \dot{\phi}_1 &= -\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial R}\right)_{R_0}, \\ \ddot{\phi}_1 + 2\Omega_0 \frac{\dot{R}_1}{R_0} &= -\frac{1}{R_0^2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\phi}\right)_{R_0}.\end{aligned}$$

Précisons la forme de la perturbation Φ_1 .

$$\Phi_1(R, \phi) = \Phi_1(R) \cos m\phi,$$

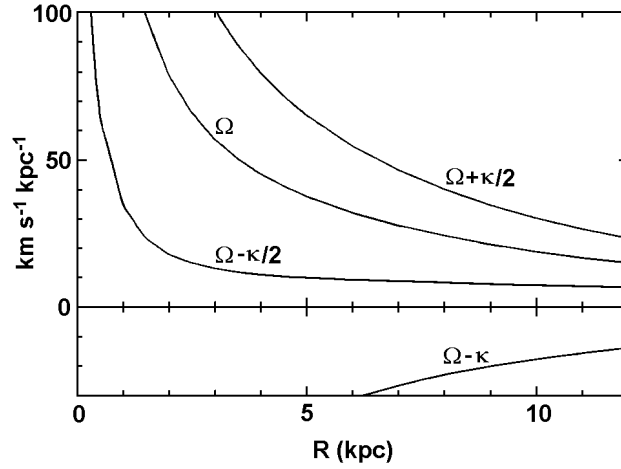


FIG. 11.4 – Comportement de $\Omega - n\kappa/m$ dans le modèle de Bahcall-Soneira de la Galaxie (Binney, Tremaine, 1987).

avec $\Phi_1(R) < 0$ (de façon à aligner la barre avec la direction $\phi = 0$) et $m = 2$. La seconde équation peut être intégrée une fois.

$$\dot{\phi}_1 + 2\Omega_0 \frac{R_1}{R_0} = -\frac{\Phi_1(R_0)}{R_0^2(\Omega_0 - \Omega_b)} \cos m(\Omega_0 - \Omega_b)t.$$

On tire $\dot{\phi}_1$ qu'on substitue dans la première équation de mouvement et il vient

$$\ddot{R}_1 + \kappa_0^2 R_1 = -\left[\frac{d\Phi_1}{dR} + \frac{2\Omega\Phi_1}{R(\Omega - \Omega_b)} \right]_{R_0} \cos m(\Omega_0 - \Omega_b)t,$$

où κ est la fréquence épicyclique définie précédemment,

$$\kappa^2 = \frac{d^2\Phi_0}{dR^2} + 3\Omega^2 = R \frac{d\Omega^2}{dR} + 4\Omega^2.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique sollicité par une force périodique de fréquence $m(\Omega_0 - \Omega_b)$. La solution s'écrit

$$R_1(t) = C \cos(\kappa_0 t + \psi) - \frac{1}{\Delta} \left[\frac{d\Phi_1}{dR} + \frac{2\Omega\Phi_1}{R(\Omega - \Omega_b)} \right]_{R_0} \cos m(\Omega_0 - \Omega_b)t,$$

où C et ψ sont des constantes arbitraires et $\Delta = \kappa_0^2 - m^2(\Omega_0 - \Omega_b)^2$. Les orbites périodiques s'obtiennent pour $C = 0$. L'expression de $R_1(t)$ devient singulière pour certaines valeurs de R_0 . On distingue la résonance de corotation qui se produit lorsque $\Omega_0 = \Omega_b$ et les résonances de Lindblad qui correspondent aux cas où $m(\Omega_0 - \Omega_b) = \pm\kappa_0$. Les rayons R_0 où ces conditions de résonance sont satisfaites s'appellent rayon de corotation et rayons de Lindblad respectivement. La figure 11.4 permet de situer aisément la position des résonances pour toute valeur de Ω_b . Les résonances de Lindblad se produisent quand l'étoile rencontre les crêtes du potentiel à une fréquence égale à sa fréquence épicyclique. La résonance interne (signe plus dans la relation ci-dessus) se produit quand l'étoile tourne plus vite

que la barre et la résonance externe se produit lorsque c'est la barre qui tourne plus vite que l'étoile.

Au voisinage des résonances, le traitement exposé ci-dessus est inadapté. Les résonances jouent un rôle central dans l'étude des barres galactiques et dans l'étude de la structure spirale.

Références

Pour l'étude des résonances, on pourra se référer à l'article de Goldreich et Tremaine (1981) et pour la résonance de corotation au livre de Binney et Tremaine (1987).

Binney J., Tremaine S., 1987. Galactic dynamics. Princeton University Press.

Goldreich P., Tremaine S., 1981. The origin of the eccentricities of the rings of Uranus. *Astrophys J*, 243, 1062–1075.

Chapitre 12

L'équation de Boltzmann sans collisions

12.1 Collisions stellaires

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, dans la plupart des systèmes stellaires, les distances entre étoiles sont énormes en comparaison de leurs rayons. Dans ces conditions, le contact entre deux étoiles est un événement exceptionnel. Nous appellerons collision stellaire l'approche de deux étoiles à une distance suffisamment faible pour que leurs orbites dans le potentiel moyen de la Galaxie soient perturbées suffisamment par leur interaction gravitationnelle. Le *suffisamment* de la phrase précédente doit être apprécié en fonction du problème étudié. Rappelons les éléments essentiels du problème des deux corps qui nous sont indispensables pour apprécier les effets des collisions stellaires.

Considérons les deux points matériels $P_1(m_1)$ et $P_2(m_2)$ interagissant par le potentiel $V = -Gm_1m_2/r_{12}$, où $r_{12} = |P_1P_2| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Leur mouvement par rapport à un système d'inertie obéit aux équations

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2),$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

En posant $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ et $M = m_1 + m_2$, on obtient aisément l'équation du mouvement de P_2 relativement à P_1 ,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM\vec{r}}{r^3}.$$

C'est le problème de Kepler qui est étudié dans la plupart des cours de mécanique analytique. Le cas qui nous intéresse est celui d'un mouvement hyperbolique (figure 12.1). Désignons par b le paramètre d'impact et par \vec{V}' et \vec{V}'' les vitesses avant et après la collision (limites lorsque $t \rightarrow -\infty$ et $+\infty$ respectivement). On notera que $V' = V''$ et on posera $V = V' = V''$ et $\overline{\Delta\vec{V}} = \vec{V}'' - \vec{V}'$. Comptons l'angle ϕ à partir de la direction dans

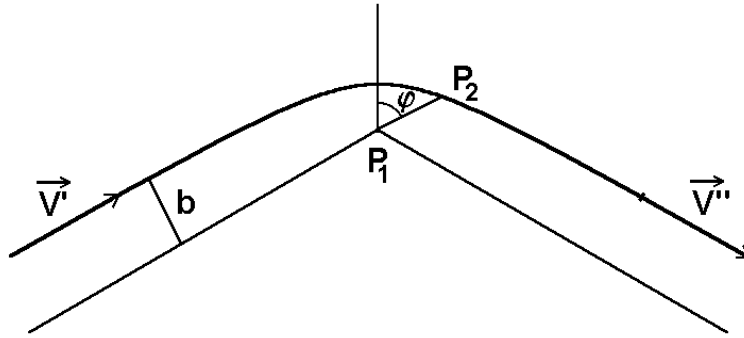


FIG. 12.1 – Problème de Kepler, mouvement hyperbolique.

laquelle les deux points sont les plus proches. Les équations de mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -\frac{GM}{r^2}, \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} &= 0.\end{aligned}$$

La deuxième équation fournit la loi des aires

$$r^2\dot{\phi} = bV.$$

On obtient ensuite (formule de Binet)

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{GM}{b^2V^2},$$

et la solution

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{b^2V^2} + A \cos \phi.$$

Les directions asymptotiques $\pm\phi_0$ sont déterminées par l'équation

$$\frac{GM}{b^2V^2} + A \cos \phi_0 = 0.$$

Lorsque $\phi \rightarrow \phi_0$, $r \sin(\phi_0 - \phi) \rightarrow b$, ce qui donne

$$\lim_{\phi \rightarrow \phi_0} \frac{\sin(\phi_0 - \phi)}{A(\cos \phi - \cos \phi_0)} = \frac{1}{A \sin \phi_0} = b,$$

d'où $A = 1/b \sin \phi_0$. Il vient donc

$$\operatorname{tg} \phi_0 = -\frac{bV^2}{GM}.$$

Si on désigne par ψ l'angle de déviation (angle entre \vec{V}'' et \vec{V}'), on a $2\phi_0 = \pi + \psi$, d'où on déduit

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{GM}{bV^2} \quad \text{ou} \quad \sin \psi = \frac{2GMbV^2}{b^2V^4 + G^2M^2}.$$

Le mouvement relatif de P_2 par rapport à P_1 étant connu, on obtient le mouvement dans un système d'inertie quelconque en notant que la vitesse du centre de masse est conservée,

$$M\vec{v}_C = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

D'autre part l'étude du problème de Kepler nous donne $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. On peut donc calculer

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{v}_C - \frac{m_2}{M}\vec{v}, \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_C + \frac{m_1}{M}\vec{v}.\end{aligned}$$

On notera que

$$\Delta\vec{v}_1 = -\frac{m_2}{M}\Delta\vec{V} \quad \text{et} \quad \Delta\vec{v}_2 = \frac{m_1}{M}\Delta\vec{V}.$$

12.2 Temps de relaxation

Considérons un système stellaire de N étoiles, ayant atteint une configuration d'équilibre. Nous nous proposons d'évaluer grossièrement le temps nécessaire pour que le mouvement réel d'une étoile dévie significativement du mouvement qu'elle aurait dans le potentiel moyen à la suite de collisions stellaires.

Désignons par R une dimension linéaire caractéristique du système (rayon d'un système sphérique par exemple) et par m la masse moyenne d'une étoile. Le théorème du viriel donne l'ordre de grandeur V des vitesses des étoiles,

$$V = \sqrt{\frac{GNm}{R}}.$$

Négligeant des facteurs numériques sans importance, la déviation ψ subie par une étoile dans une collision de paramètre d'impact b s'écrit

$$\psi \approx \frac{Nb/R}{1 + (Nb/R)^2}.$$

Les déviations subies au cours des collisions successives se produisent dans des directions aléatoires indépendantes de sorte qu'on peut s'attendre à une déviation moyenne nulle. Nous considérerons que l'étoile a été déviée significativement de sa trajectoire lorsqu'on aura

$$\sum \psi^2 \approx 1,$$

où la somme porte sur toutes les collisions subies. Calculons cette somme pour une traversée du système stellaire. Le nombre dn de collision dont le paramètre d'impact est compris entre b et $b + db$ est donné par

$$dn \approx \frac{Nb db}{R^2}.$$

Il vient donc

$$\sum \psi^2 \approx \int_0^R \frac{(Nb/R)^2}{[1 + (Nb/R)^2]^2} \frac{Nb}{R^2} db \approx \frac{1}{N} \int_0^N \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^2} \approx \frac{\ln N}{N}.$$

Cette estimation montre que dès que N est un peu élevé, la déviation du mouvement par rapport au mouvement dans le potentiel moyen est négligeable au cours d'une traversée du système. Cette déviation, due aux collisions stellaires reste négligeable tant que l'intervalle de temps considéré reste petit par rapport au temps de relaxation

$$\tau_{relax} = \frac{N}{\ln N} \tau_{cross}.$$

Pour une galaxie, on a typiquement $N \approx 10^{11}$ et un âge de quelques centaines de τ_{cross} , de sorte que les collisions stellaires sont totalement négligeables dans l'étude de la dynamique d'une galaxie, sauf peut-être dans les régions centrales où les conditions peuvent être très différentes des conditions moyennes.

Pour un amas globulaire typique, on a $N \approx 10^5$ et $\tau_{cross} \approx 10^5$ ans, de sorte que les collisions stellaires peuvent jouer un rôle non négligeable sur des durées de vie de 10^{10} ans. Dans les régions centrales, les collisions stellaires jouent d'ailleurs un rôle clé.

12.3 L'équation de Boltzmann sans collisions

Dans un système d'inertie, le mouvement d'une étoile dans le potentiel moyen $\Phi(\vec{r}, t)$ obéit à l'équation de Newton

$$\ddot{\vec{r}} = -\text{grad } \Phi.$$

Par tout point (\vec{r}, \vec{v}, t) de l'espace-temps des phases passe un et un seul mouvement. Les mouvements définissent donc une famille d'application de l'espace des phases sur lui-même, paramétrée par le temps. Pour simplifier l'écriture, posons $w = (\vec{r}, \vec{v})$. Le mouvement issu de w_0 au temps $t = 0$ passe par $w = w(w_0, t)$ au temps t . Considérons un volume quelconque Ω_0 de l'espace des phases. L'application $w_0 \mapsto w(w_0, t)$ le transforme en Ω_t . Si on néglige les collisions, c'est-à-dire les déviations par rapport au mouvement dans le potentiel moyen, le nombre d'étoiles contenues dans Ω_t est constant et donné par

$$N = \int_{\Omega_t} f(w, t) d\Omega \quad \text{avec} \quad d\Omega = dw = \overrightarrow{dr} \overrightarrow{dv}.$$

En dérivant par rapport au temps, il vient

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \oint_{\Sigma_t} f \dot{w} \cdot n d\Sigma = 0,$$

où Σ_t est l'hypersurface frontière de Ω_t et n la normale à Σ_t dirigée vers l'extérieur de Ω_t . En notant que $\dot{w} = (\vec{v}, -\text{grad } \Phi)$ et en utilisant la formule d'Ostrogradsky, il vient

$$\int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \text{grad } \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right] d\Omega = 0.$$

Cette relation est satisfaite pour tout t et pour tout Ω_t , il en résulte l'équation de Boltzmann sans collisions,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \text{grad } \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0,$$

en tout point de l'espace-temps des phases. Cette équation exprime la conservation du nombre d'étoiles (ou plutôt de leurs points représentatifs dans l'espace des phases) de la même façon que l'équation de continuité exprime la conservation de la masse en hydrodynamique. L'équation de Boltzmann peut être considérée comme une équation d'évolution de f .

L'équation de Boltzmann s'écrit sans difficulté en coordonnées cartésiennes. A partir de là, on l'obtient en coordonnées cylindriques en effectuant le changement de coordonnées dans les opérateurs de dérivation (des indications sont fournies en appendice).

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_R \frac{\partial f}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial f}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{v_\phi^2}{R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) \frac{\partial f}{\partial v_R} - \frac{1}{R} \left(v_R v_\phi + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\phi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0.$$

Appliquée à une configuration stationnaire à symétrie axiale (la Galaxie, par exemple), cette équation se réduit à

$$v_R \frac{\partial f}{\partial R} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{v_\phi^2}{R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) \frac{\partial f}{\partial v_R} - \frac{v_R v_\phi}{R} \frac{\partial f}{\partial v_\phi} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial v_z} = 0.$$

De la même façon, on obtient l'équation de Boltzmann en coordonnées sphériques, après de fastidieux calculs (voir indications données en appendice).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} \\ + \frac{1}{r} \left(v_\phi^2 \cotg \theta - v_r v_\theta - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} - \frac{1}{r} \left(v_r v_\phi + v_\theta v_\phi \cotg \theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) \frac{\partial f}{\partial v_\phi} = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une configuration stationnaire à symétrie sphérique, cette équation se réduit à

$$v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} + \frac{1}{r} \left(v_\phi^2 \cotg \theta - v_r v_\theta \right) \frac{\partial f}{\partial v_\theta} - \frac{1}{r} \left(v_r v_\phi + v_\theta v_\phi \cotg \theta \right) \frac{\partial f}{\partial v_\phi} = 0.$$

12.4 Le théorème de Jeans

Considérons le mouvement d'une étoile dans le potentiel galactique moyen. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ soit une intégrale première est qu'en tout point de l'espace-temps des phases, elle satisfasse à l'équation de Liouville,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \text{grad } \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0.$$

Cette équation est exactement la même que l'équation de Boltzmann sans collisions qui régit l'évolution de la fonction de distribution f d'un système stellaire. La fonction de distribution d'un système stellaire est donc une intégrale première du mouvement d'une particule dans le potentiel moyen. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons uniquement au

cas stationnaire (ϕ et f indépendants du temps), les seules intégrales premières à prendre en considération seront les intégrales premières indépendantes du temps.

Si le mouvement d'une particule admet k et seulement k intégrales premières indépendantes $I_1(\vec{r}, \vec{v}), \dots, I_k(\vec{r}, \vec{v})$, on peut affirmer que toute solution f de l'équation de Boltzmann sans collisions s'exprime en termes de ces k intégrales premières,

$$f = f(I_1, \dots, I_k).$$

En dynamique stellaire, cet énoncé est connu sous le nom de théorème de Jeans. Notons que c'est l'hypothèse d'absence de collisions qui permet de réduire de façon aussi draconienne le problème de la détermination de la fonction de distribution f à celui de la recherche des intégrales premières du mouvement d'une particule. Nous allons examiner quelques cas.

12.4.1 Système ne possédant aucune symétrie

Un système quelconque ne possédant aucune symétrie n'admet en général qu'une seule intégrale première, l'intégrale d'énergie totale

$$E = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Phi(x, y, z),$$

et par conséquent,

$$f = f(E).$$

On notera qu'en tout point, l'ellipsoïde des vitesses est sphérique.

12.4.2 Système à symétrie de révolution

Considérons un système possédant une symétrie de révolution. En coordonnées cylindriques, $\Phi = \Phi(R, z)$ et le problème admet deux intégrales premières, l'énergie totale E et la composante L_z du moment cinétique.

$$E = \frac{1}{2}(v_R^2 + v_\phi^2 + v_z^2) + \Phi(R, z),$$

$$L_z = Rv_\phi.$$

Si le système ne possède pas d'autre intégrale première, on a

$$f = f(E, L_z).$$

Les composantes v_R et v_z de la vitesse interviennent symétriquement dans la fonction de distribution et par conséquent, en tout point du système, on doit avoir égalité entre les composantes correspondantes de la dispersion des vitesses,

$$\sigma_z = \sigma_R.$$

Cette conclusion n'est manifestement pas en accord avec les observations qui montrent que, dans le voisinage solaire,

$$\sigma_z \approx 0,5\sigma_R.$$

Ce désaccord pourrait être le signe que la Galaxie n'a pas atteint un état stationnaire. Toutefois, avec un âge équivalent à une cinquantaine de révolutions, il est à peu près certain que l'état stationnaire de la Galaxie est une hypothèse justifiée.

Des indications sur l'origine de ce désaccord sont venues de calculs analytiques et de simulations numériques montrant l'existence d'une troisième intégrale première, ou du moins d'une grandeur qui varie suffisamment peu sur la durée de vie de la Galaxie pour qu'elle puisse être considérée, pratiquement, comme une intégrale première.

12.4.3 Système à symétrie de révolution et potentiel séparable

Considérons à présent un potentiel à symétrie de révolution et séparé. Écrivons-le

$$\Phi = \Phi_1(R) + \Phi_2(z).$$

Nous avons vu que le potentiel au voisinage du plan galactique pouvait s'écrire approximativement sous cette forme. Le système admet alors trois intégrales premières indépendantes, E , L_z et I ,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(v_R^2 + v_\phi^2 + v_z^2) + \Phi_1(R) + \Phi_2(z), \\ L_z &= Rv_\phi, \\ I &= \frac{1}{2}v_z^2 + \Phi_2(z). \end{aligned}$$

La fonction de distribution s'écrit

$$f = f(E, L_z, I).$$

12.4.4 Système à symétrie sphérique

En coordonnées sphériques, le potentiel dépend seulement de la coordonnée radiale, on a donc $\Phi = \Phi(r)$. On a alors quatre intégrales premières, l'énergie totale et les trois composantes du moment cinétique. Toutefois, en raison de la symétrie sphérique, la fonction de distribution ne peut pas dépendre de la direction de \vec{L} mais seulement de son module.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2) + \Phi(r) \\ L &= r\sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2}. \end{aligned}$$

La fonction de distribution s'écrit donc

$$f = f(E, L).$$

On notera qu'une telle fonction de distribution implique que l'ellipsoïde des vitesses ait une symétrie de révolution autour de la direction radiale,

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi.$$

Chapitre 13

Équilibre des systèmes à symétrie sphérique sans collisions

Considérons la fonction de distribution de masse f d'un système à symétrie sphérique (c'est-à-dire la fonction de distribution multipliée par la masse moyenne des étoiles considérées). Le potentiel gravifique généré par cette distribution de masse est donné par l'équation de Poisson,

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho = 4\pi G \int f d\vec{v}.$$

En vertu du théorème de Jeans et de la symétrie sphérique, f dépend seulement de E et L . En coordonnées sphériques, on écrit donc

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \int f \left(\frac{1}{2} v^2 + \Phi, |\vec{r} \wedge \vec{v}| \right) d\vec{v}.$$

C'est l'équation fondamentale qui gouverne l'équilibre des systèmes stellaires sphériques sans collisions. Dans la base cartésienne locale, la vitesse s'écrit

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta + v_\phi \vec{e}_\phi.$$

On a donc

$$|\vec{r} \wedge \vec{v}| = r \sqrt{v_\theta^2 + v_\phi^2}.$$

Adoptons des coordonnées polaires dans l'espace des vitesses,

$$\begin{aligned} v_r &= v \cos \eta, \\ v_\theta &= v \sin \eta \cos \psi, \\ v_\phi &= v \sin \eta \sin \psi. \end{aligned}$$

Il vient

$$L = rv \sin \eta,$$

d'où,

$$\rho = 2\pi \int_0^\pi \sin \eta d\eta \int_0^\infty f \left(\frac{1}{2} v^2 + \Phi, rv \sin \eta \right) v^2 dv.$$

Nous nous intéresserons essentiellement aux modèles dont la fonction de distribution dépend seulement de E . Dans ce cas l'expression ci-dessus se simplifie,

$$\rho = 4\pi \int_0^\infty f\left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi\right)v^2 dv.$$

Dans ces modèles, le tenseur de dispersion des vitesses est isotrope.

13.1 Modèles polytropiques

Considérons une fonction de distribution de la forme

$$f(E) = \begin{cases} F \times (E_0 - E)^{n-\frac{3}{2}} & \text{si } E \leq E_0 \leq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où F et E_0 sont des constantes. La densité est donnée par

$$\rho = 4\pi F \int_0^{\sqrt{2(E_0-\Phi)}} (E_0 - \Phi - \frac{1}{2}v^2)^{n-\frac{3}{2}}v^2 dv = c_n \Psi^n,$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \Psi &= E_0 - \Phi, \\ c_n &= 4\pi\sqrt{2}FB \left(n - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{3/2}\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right)F}{\Gamma(n+1)}. \end{aligned}$$

Pour que l'expression obtenue ait un sens, on doit avoir $n > 1/2$.

Cette relation entre ρ et Ψ permet d'éliminer ρ de l'équation de Poisson,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0.$$

Posons $\xi = r/a$ avec $a = 1/\sqrt{4\pi G c_n \Psi(0)^{n-1}}$ et $\psi = \Psi/\Psi(0)$, il vient

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \psi^n = 0.$$

C'est l'équation de Lane-Emden qui régit également la structure des modèles stellaires polytropiques. La solution qui nous intéresse doit satisfaire les conditions

$$\psi = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 0.$$

Cette solution $\psi_n(\xi)$ est appelée fonction de Lane-Emden d'indice n . Les fonctions de Lane-Emden d'indices 0, 1 et 5 s'expriment simplement :

$$\psi_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6},$$

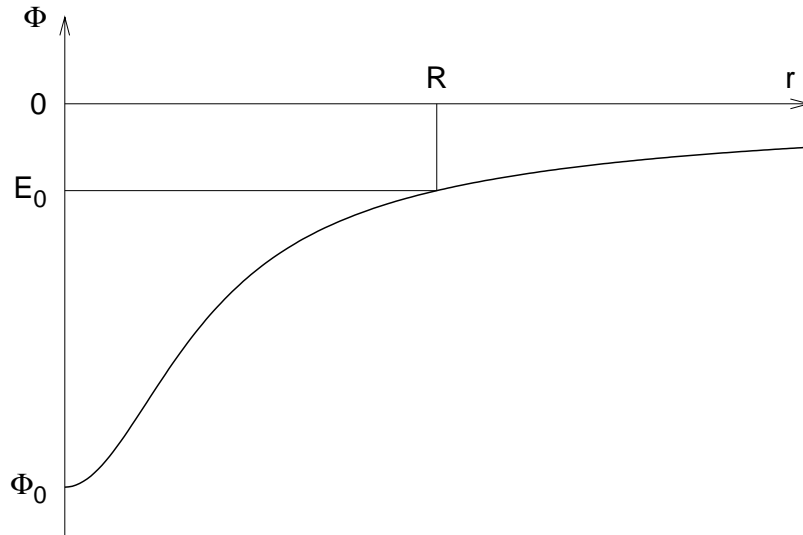


FIG. 13.1 – Relation entre le potentiel $\Phi(r)$ et les paramètres Φ_0 , E_0 et R .

$$\begin{aligned}\psi_1(\xi) &= \frac{\sin \xi}{\xi}, \\ \psi_5(\xi) &= \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Pour les autres valeurs de l'indice n , les fonctions de Lane-Emden ne s'expriment pas en termes de fonctions élémentaires. Pour $n < 5$, $\psi_n(\xi)$ possède un ou des zéros dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et nous désignerons par ξ_1 le plus petit d'entre eux. Dans ce cas le modèle a une extension finie (figure 13.1) et son rayon R est donné par $R = a\xi_1$. Pour $n \geq 5$, ψ_n reste positif dans $[0, +\infty[$ et le modèle s'étend à l'infini.

La masse $m(r)$ contenue dans la sphère de rayon r est donnée par

$$m = -4\pi a^3 \rho_0 \xi^2 \frac{d\psi_n}{d\xi},$$

où ρ_0 est la densité centrale. Pour $n \leq 5$ la masse totale est finie mais ce n'est plus le cas pour $n > 5$ (les modèles polytropiques d'indice $n > 5$ sont donc sans intérêt). Pour $n < 5$, la masse totale M est donc donnée par l'expression ci-dessus pour $\xi = \xi_1$. On peut exprimer E_0 en termes de M et R :

$$E_0 = \Phi(R) = -\frac{GM}{R}.$$

La densité moyenne s'écrit

$$\bar{\rho} = -3\rho_0 \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_1}.$$

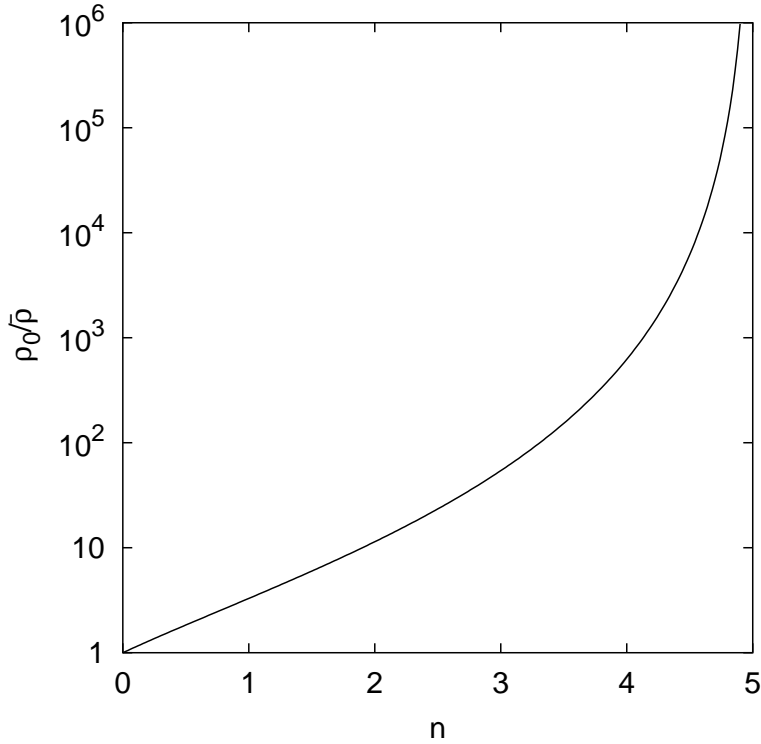


FIG. 13.2 – Relation entre l'indice polytropique n et $\rho_0/\bar{\rho}$.

Le rapport $\rho_0/\bar{\rho}$ entre la densité centrale et la densité moyenne, peut être utilisé pour caractériser la concentration du modèle. Il ne dépend que de n ; la relation entre n et $\rho_0/\bar{\rho}$ est illustrée par la figure 13.2.

Les modèles polytropiques forment une famille à 3 paramètres. Pour $n < 5$, on peut, par exemple, caractériser un modèle polytropique par sa masse M , son rayon R et son indice n . Deux modèles de même indice sont homologues. La figure 13.3 montre le comportement de la densité dans des modèles polytropiques d'indices différents.

On calcule aisément la dispersion des vitesses, elle s'écrit $\sqrt{3\Psi/(n+1)}$ et décroît du centre jusqu'à une valeur nulle à la limite de l'amas stellaire.

Le modèle polytropique d'indice 5 ou modèle de Plummer présente un intérêt particulier. La fonction de Lane-Emden d'indice 5 a été donnée plus haut. La densité s'écrit donc

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{5/2}}.$$

Cette loi décrit relativement bien la variation de densité dans les amas globulaires. Elle ne convient cependant pas pour les galaxies elliptiques car la décroissance de la densité aux grandes valeurs de r est trop rapide ($\rho \propto r^{-5}$ alors que dans les galaxies elliptiques elle décroît moins vite que r^{-4}). En utilisant les expressions vues plus haut, on peut écrire la masse,

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 \frac{\xi^3}{\left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{3/2}}.$$

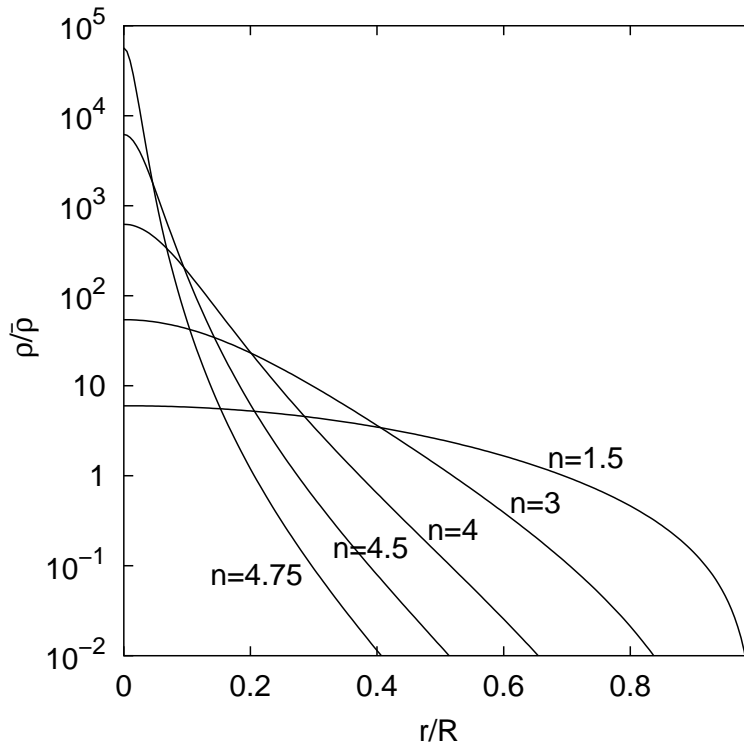


FIG. 13.3 – Profils de densité de modèles polytropiques.

Lorsque $r \rightarrow +\infty$, cette expression tend vers la limite finie $M = 4\pi\sqrt{3}a^3\rho_0$. Il en résulte que $\bar{\rho}$ et E_0 sont nuls.

13.2 Modèle isotherme

Considérons la fonction de distribution

$$f(E) = F e^{-E/\sigma^2},$$

où F et σ sont des constantes. On vérifie aisément que la dispersion des vitesses dans une direction quelconque est égale à σ . On calcule

$$\rho = (2\pi\sigma^2)^{3/2} F e^{-\Phi/\sigma^2}.$$

On notera que la densité d'une atmosphère isotherme plane dans un champ de gravitation constant obéit à une loi analogue,

$$\rho \propto e^{-\Phi/\sigma^2},$$

avec $\sigma = \sqrt{\mathcal{R}T/\mu}$ qui est du même ordre de grandeur que la vitesse du son ou la vitesse d'agitation thermique.

En substituant $\Phi = -\sigma^2 \ln \rho + cte$ dans l'équation de Poisson, il vient

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d \ln \rho}{dr} \right) + \frac{4\pi G \rho}{\sigma^2} = 0.$$

Il est aisé de vérifier que l'expression suivante est solution de l'équation,

$$\rho = \frac{\sigma^2}{2\pi Gr^2}.$$

Cette solution est singulière au centre et le modèle qu'elle décrit est appelé sphère isotherme singulière.

Pour étudier les solutions régulières au centre, posons $r = a\xi$ avec $a = \sigma/\sqrt{4\pi G\rho_0}$ et $\psi = \frac{\Phi(0) - \Phi}{\sigma^2}$. L'équation de Poisson prend la forme

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) + e^\psi = 0.$$

Cette équation doit être résolue avec les conditions

$$\psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 0.$$

Il s'agit du même problème que celui de la détermination d'une structure stellaire isotherme.

La masse contenue dans la sphère de rayon r est donnée par

$$m(r) = -4\pi\rho_0 a^3 \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}.$$

On peut montrer que pour les grandes valeurs de r , $\rho \propto r^{-2}$ et $v_c \rightarrow \sqrt{2}\sigma$. La masse totale est infinie.

Exercice

Justifiez l'affirmation selon laquelle le modèle isotherme s'obtient comme cas limite du modèle polytropique pour $n \rightarrow \infty$. Suggestion : effectuez le changement de variables $\psi^n = e^{\psi'}$ et $\xi = \sqrt{n}\xi'$

13.3 Modèles de King

Les modèles de King sont caractérisés par la fonction de distribution

$$f(E) = \begin{cases} F \times \left(e^{(E_0 - E)/\sigma^2} - 1 \right) & \text{si } E \leq E_0 < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où F , E_0 et σ sont des constantes. Après quelques calculs on obtient

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \sigma^3 F e^{\psi} \gamma \left(\frac{5}{2}, \psi \right) \\ &= (2\pi)^{3/2} \sigma^3 F \left\{ e^\psi \operatorname{erf} \sqrt{\psi} - 2\sqrt{\frac{\psi}{\pi}} \left(1 + \frac{2\psi}{3} \right) \right\}, \end{aligned}$$

où on a posé $\psi = (E_0 - \Phi)/\sigma^2$. Posons $r = a\xi$ avec $a = \sigma/\sqrt{4\pi G\rho_0}$ et l'équation de Poisson s'écrit

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = -\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Si on fixe arbitrairement à ψ_0 la valeur de ψ à l'origine, le second membre est une fonction bien déterminée de ψ . L'équation sera donc intégrée avec les conditions initiales

$$\psi(0) = \psi_0 > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right)_0 = 0.$$

L'intégration est poursuivie jusqu'au point ξ_1 où ψ s'annule. Les solutions de l'équation différentielle forment ainsi une famille à un paramètre (ψ_0 , par exemple). Si on se donne σ et ρ_0 , on peut calculer a et le rayon du système stellaire (rayon de marée) $r_t = a\xi_1$. La masse contenue dans une sphère de rayon $r = a\xi$ est donnée par

$$m(r) = -4\pi a^3 \rho_0 \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}.$$

La masse totale M est donnée par la même expression évaluée en ξ_1 . On peut alors déterminer la constante E_0

$$E_0 = \Phi(r_t) = -\frac{GM}{r_t}.$$

La densité moyenne du système s'écrit

$$\bar{\rho} = -3\rho_0 \left(\frac{1}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} \right)_{\xi_1}.$$

La concentration du modèle peut être appréciée par le rapport $\rho_0/\bar{\rho}$ qui ne dépend que du paramètre ψ_0 choisi pour l'intégration. La relation entre ψ_0 et $\rho_0/\bar{\rho}$ est illustrée par la figure 13.4. La figure 13.5 montre le comportement de la densité pour quelques valeurs de ψ_0 .

Comme les modèles polytropiques, les modèles de King constituent une famille à 3 paramètres. Un modèle pourra être caractérisé par sa masse M , son rayon r_t et ψ_0 . Deux modèles de mêmes ψ_0 sont homologues.

Dans la littérature, on utilise plutôt le rayon de King $r_0 = 3a$ comme échelle de longueur à la place de a et le paramètre $c = \log_{10}(r_t/r_0)$ pour apprécier la concentration du modèle. La figure 13.6 donne la relation entre les paramètres ψ_0 et c .

Contrairement au cas du modèle isotherme, la dispersion des vitesses n'est pas constante. Elle décroît du centre jusqu'à la limite de l'amas stellaire où elle s'annule.

Les modèles de King décrivent bien les amas globulaires pour des valeurs de c comprises entre 0,75 et 1,75. Les modèles avec $c > 2,2$ rendent compte de façon plus ou moins satisfaisante des profils de brillance des galaxies elliptiques, en particulier le profil de Hubble est assez bien reproduit pour $\psi_0 = 8$ ($c \approx 1,825$). Les figures 13.7 et 13.8 montrent l'ajustement de modèles de King à des profils observés.

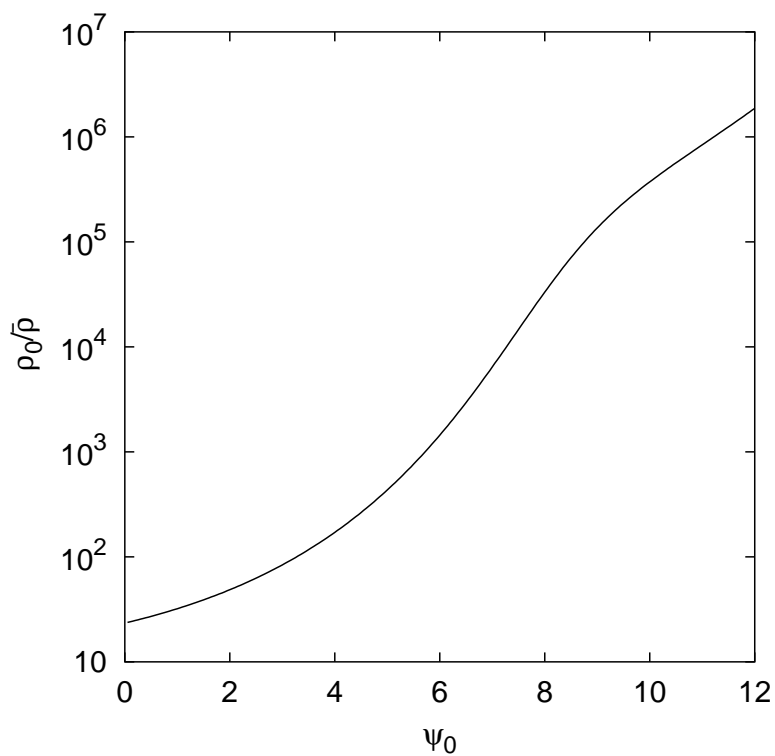


FIG. 13.4 – Relation entre ψ_0 et $\rho_0/\bar{\rho}$ dans les modèles de King.

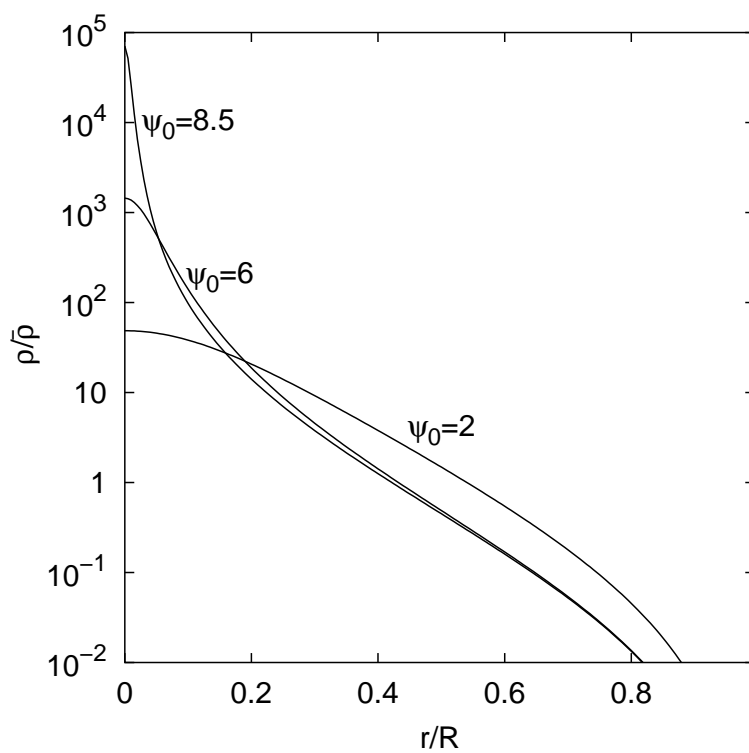


FIG. 13.5 – Profils de densité de modèles de King.

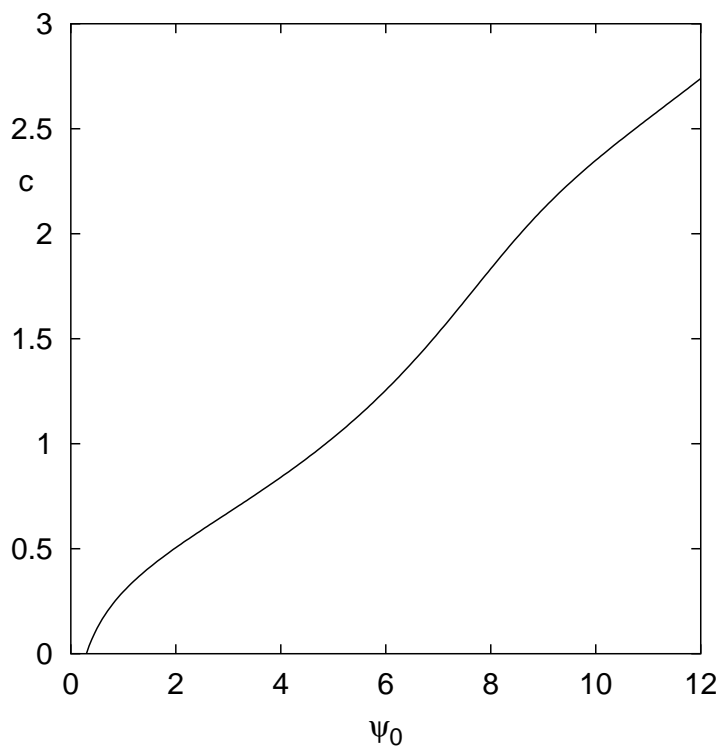


FIG. 13.6 – Relation entre les paramètres ψ_0 et c dans les modèles de King.

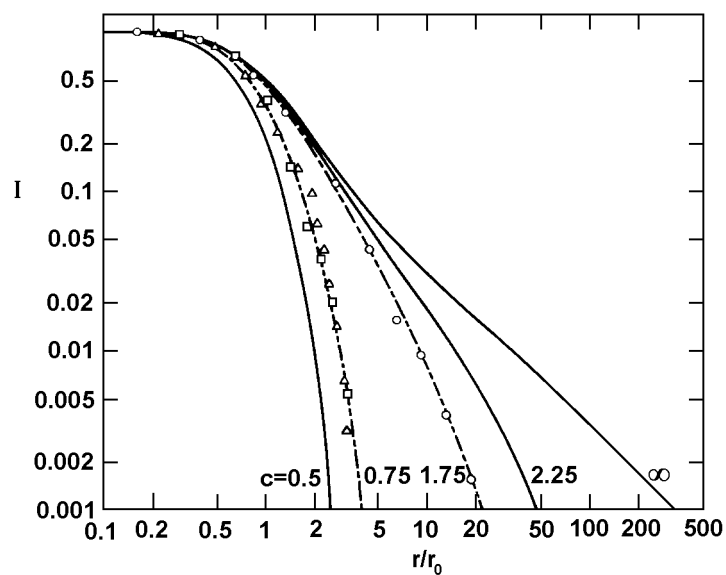


FIG. 13.7 – Profils de brillance de la galaxie naine du sculpteur (triangles), de l'amas globulaire NGC 5053 (carrés) et de l'amas globulaire NGC 6388 (cercles), (Mihalas, Binney, 1981).

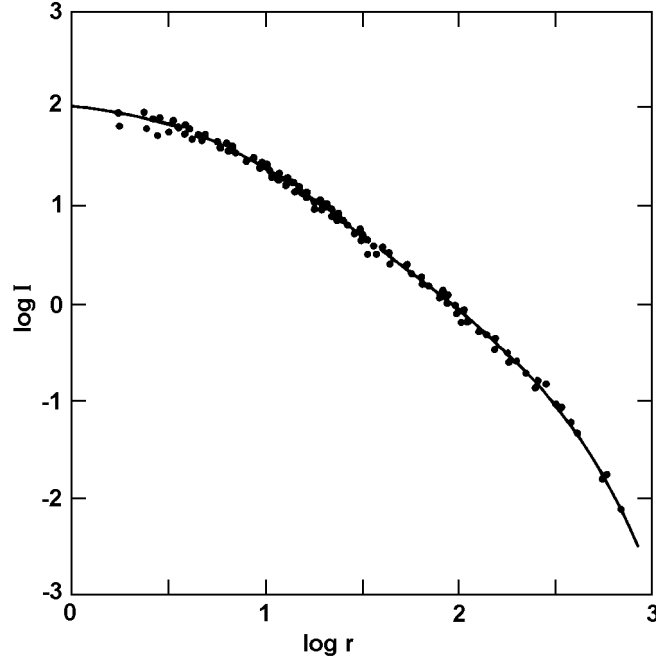


FIG. 13.8 – Profil de brillance de la galaxie elliptique géante NGC 4472, r est exprimé en secondes d’arc et I dans une unité arbitraire. Un modèle de King avec $c = 2,35$ s’ajuste bien aux données d’observation (Mihalas, Binney, 1981).

13.4 Profil de densité arbitrairement donné

Etant donné un profil de densité $\rho(r)$, est-il possible de retrouver la fonction de distribution correspondante $f(E)$? C’est le problème inverse de celui qui a été considéré dans les sections précédentes. À partir de la distribution de densité, l’équation de Poisson permet de calculer le potentiel $\Phi(r)$. C’est une fonction croissante de r qui tend vers zéro à l’infini. La fonction inconnue $f(E)$ satisfait à l’équation

$$\rho = 4\pi \int_0^{\sqrt{-2\Phi}} f(E)v^2 dv.$$

Faisons le changement de variables $v \mapsto E$ dans l’intégrale, il vient

$$\rho = 4\pi \int_{\Phi}^0 f(E)\sqrt{2(E - \Phi)} dE.$$

Comme $\Phi(r)$ est une fonction monotone connue de r , on peut considérer ρ , dans le membre de gauche de la relation précédente comme une fonction de Φ et dériver cette relation par rapport à Φ . Il vient

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{d\rho}{d\Phi} = \int_{\Phi}^0 \frac{f(E) dE}{\sqrt{E - \Phi}}.$$

Cette équation est une équation d’Abel et sa solution s’écrit

$$f(E) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \frac{d}{dE} \int_E^0 \frac{d\rho}{d\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{\Phi - E}}.$$

Cette solution n'est acceptable que si $f(E) \geq 0$ pour tout E . En d'autres termes, une distribution sphérique de densité $\rho(r)$ n'est acceptable, sous les hypothèses faites (tenseur de dispersion des vitesses isotrope), que si

$$\int_E^0 \frac{d\rho}{d\Phi} \frac{d\Phi}{\sqrt{\Phi - E}}$$

est une fonction croissante de E .

13.5 Modèles avec $f = f(E, L)$

Nous ne dirons que quelques mots sur les modèles dont la fonction de distribution dépend de E et de L .

Les modèles de Michie sont des extensions des modèles de King. Leurs fonctions de distribution s'écrivent

$$f(E, L) = \begin{cases} F \times \left(e^{(E_0 - E)/\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{L^2}{2a^2\sigma^2}} & \text{si } E \leq E_0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où F , E_0 et σ sont des constantes.

Dans les modèles d'Osipkov et Merritt, f dépend de E et L par l'intermédiaire d'une variable Q ,

$$Q = E_0 - E - \frac{L^2}{2a^2} = E_0 - \Phi - \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \eta \right) = \Psi - \frac{v^2}{2} \left(1 + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \eta \right).$$

On recherche une fonction de distribution $f(Q)$, nulle pour $Q \leq 0$. En effectuant le changement de variables $v \mapsto Q$ dans l'expression de f , il vient

$$\begin{aligned} \rho &= 2\pi \int_0^\pi \sin \eta \, d\eta \int_0^\infty f(Q) v^2 \, dv = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \eta \, d\eta}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2} \sin^2 \eta \right)^{3/2}} \int_0^\Psi f(Q) \sqrt{2(\Psi - Q)} \, dQ \\ &= \frac{4\pi}{1 + \frac{r^2}{a^2}} \int_0^\Psi f(Q) \sqrt{2(\Psi - Q)} \, dQ. \end{aligned}$$

En utilisant un procédé analogue à celui qui a été employé plus haut, on obtient une équation d'Abel

$$\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{d}{d\Psi} \left[\left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) \rho \right] = \int_0^\Psi \frac{f(Q) \, dQ}{\sqrt{\Psi - Q}},$$

dont la solution s'écrit

$$f(Q) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2} \frac{d}{dQ} \int_0^Q \frac{d}{d\Psi} \left[\left(1 + \frac{r^2}{a^2} \right) \rho \right] \frac{d\Psi}{\sqrt{Q - \Psi}}.$$

Dans les deux familles de modèles, la distribution des vitesses est isotrope au centre du système stellaire et presque radiale dans les zones externes. Le paramètre a situe la région de transition entre une distribution relativement isotrope et une distribution fortement anisotrope.

13.6 Bref rappel sur les fonctions eulériennes et l'équation d'Abel

Rappelons les définitions et quelques propriétés des fonctions gamma, bêta et gamma incomplète qui peuvent être utiles dans l'étude des modèles décrits dans ce chapitre.

$$\begin{aligned}\Gamma(a) &= \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (a > 0), \\ \Gamma(a) &= (a-1)\Gamma(a-1), \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \quad (n \text{ entier}), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(a) &\approx e^{-a} a^{a-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \quad (a \gg 1). \\ B(a, b) &= \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (a, b > 0). \\ \gamma(a, x) &= \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt \quad (a > 0), \\ \gamma(a+1, x) &= a\gamma(a, x) - x^a e^{-x}, \\ \gamma(1, x) &= 1 - e^{-x}, \\ \gamma\left(\frac{1}{2}, x\right) &= \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \sqrt{x},\end{aligned}$$

où la fonction d'erreur $\operatorname{erf} x$ est définie par

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Équation d'Abel : si

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(t) dt}{(x-t)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1),$$

alors

$$g(t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(x) dx}{(t-x)^{1-\alpha}} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \left\{ \int_0^t \frac{df}{dx} \frac{dx}{(t-x)^{1-\alpha}} + \frac{f(0)}{t^{1-\alpha}} \right\}.$$

Références

L'équation de Lane-Emden ainsi que celle du modèle isotherme sont bien connues en structure stellaire. Leurs solutions servent à la construction de modèles stellaires simples. Ces équations sont étudiées dans le livre de Chandrasekhar (1939).

Binney J., Tremaine S., 1987. Galactic dynamics. Princeton University Press.

Chandrasekhar S., 1939. An introduction to the study of stellar structure. University of Chicago Press. Réimprimé par Dover, 1967.

Mihalas D., Binney J., 1981. Galactic astronomy. Freeman.

Chapitre 14

Équilibre des disques sans collisions

Dans les systèmes à symétrie de révolution, nous considérerons seulement le disque de Mestel. Rappelons qu'il est caractérisé par une densité superficielle

$$\Sigma(R) = \frac{\Sigma_0 R_0}{R}.$$

La vitesse circulaire v_c est constante,

$$v_c^2 = 2\pi G \Sigma_0 R_0$$

et le potentiel, dans le disque, peut s'exprimer par

$$\Phi(R, 0) = v_c^2 \ln R.$$

Considérons la fonction de distribution

$$f(E, L_z) = \begin{cases} FL_z^q e^{-E/\sigma^2} & \text{si } L_z > 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où F , σ et q sont des constantes. On calcule

$$\begin{aligned} \Sigma &= \int_0^\infty dv_\phi \int_{-\infty}^\infty f dv_R = FR^{(q-\frac{v_c^2}{\sigma^2})} \int_0^\infty v_\phi^q e^{-\frac{v_\phi^2}{2\sigma^2}} dv_\phi \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{v_R^2}{2\sigma^2}} dv_R \\ &= 2^{q/2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) F \sigma^{q+2} R^{(q-\frac{v_c^2}{\sigma^2})}. \end{aligned}$$

En posant $q = v_c^2/\sigma^2 - 1$ et en choisissant F de façon appropriée, on obtient la loi de densité rappelée plus haut. A partir de la fonction de distribution, on calcule sans peine

$$\begin{aligned} \overline{v_R^2} &= \sigma^2, \\ \overline{v_\phi} &= \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{q}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \sigma, \\ \overline{v_\phi^2} &= (q+1)\sigma^2 = v_c^2. \end{aligned}$$

Dans le cas limite où $v_c \rightarrow 0$ ($q \rightarrow -1$), la structure du disque est soutenue par les mouvements radiaux des étoiles. Au contraire, lorsque $\sigma \rightarrow 0$ ($q \rightarrow \infty$), on a $\bar{v}_\phi \approx \sigma\sqrt{q} \approx v_c$, et la structure du disque est alors soutenue par la force centrifuge.

Exercice

Étudiez la structure verticale d'un disque mince en négligeant les dérivées radiales et en prenant une fonction de distribution de la forme

$$f(E_z) = F e^{-E_z/\sigma_z^2} \quad \text{où} \quad E_z = \frac{1}{2}v_z^2 + \Phi,$$

(voir Binney et Tremaine (1987), exercice 4-25, page 282).

Référence

Binney J., Tremaine S., 1987. Galactic dynamics. Princeton University Press.

Chapitre 15

Hydrodynamique stellaire

En intégrant l'équation de Boltzmann sur l'espace des vitesses après l'avoir multipliée par les composantes des vitesses portées à certaines puissances, on obtient des équations aux moments qui ressemblent aux équations de l'hydrodynamique.

La densité spatiale ν est évidemment définie par

$$\nu(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}.$$

On définit un vecteur vitesse \bar{v} à partir des moments d'ordre 1,

$$\bar{v}_i(\vec{r}, t) = \frac{1}{\nu} \int f(\vec{r}, \vec{v}, t) v_i d\vec{v}.$$

Par intégration de l'équation de Boltzmann, on obtient

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_j)}{\partial x_j} = 0,$$

qui est l'équivalent de l'équation de continuité.

Si on multiplie l'équation de Boltzmann par v_i avant de l'intégrer, il vient

$$\frac{\partial(\nu \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0,$$

où

$$\bar{v}_i \bar{v}_j = \frac{1}{\nu} \int f v_i v_j d\vec{v}.$$

Cette équation est l'équivalent de l'équation de mouvement de l'hydrodynamique.

Nous définissons le tenseur σ_{ij}^2 de façon cohérente avec une définition antérieure par

$$\sigma_{ij}^2 = \overline{(v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j)} = \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{v}_i \bar{v}_j.$$

En utilisant l'équation de continuité, l'équation de mouvement peut alors se mettre sous la forme

$$\nu \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \nu \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial(\nu \sigma_{ij}^2)}{\partial x_j}.$$

Dans cette équation $\nu\sigma_{ij}^2$ joue le même rôle que le tenseur des tensions en hydrodynamique. Le tenseur σ_{ij}^2 est symétrique. Il existe donc un système d'axes cartésiens dans lequel le tenseur est diagonal, ses éléments sont alors les dispersions des vitesses dans les directions correspondantes.

Contrairement au cas des fluides, nous ne pouvons pas écrire une expression de σ_{ij}^2 en termes de la densité ν . Et si on essaie d'obtenir une équation pour ce tenseur en multipliant l'équation de Boltzmann par $v_i v_j$ avant d'intégrer, on obtient des termes en $\overline{v_i v_j v_k}$ dont la détermination demandera des équations supplémentaires. On est donc obligé de faire des hypothèses sur la forme de σ^2 .

15.1 Coordonnées cylindriques

On obtient les équations de l'hydrodynamique stellaire en coordonnées cylindriques en effectuant un changement de coordonnées dans les équations en coordonnées cartésiennes obtenues plus haut. On peut également partir de l'équation de Boltzmann écrite en coordonnées cylindriques. On établit d'abord l'équation de continuité

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(\nu \bar{v}_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\nu \bar{v}_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \bar{v}_z) + \frac{\nu \bar{v}_R}{R} = 0.$$

La composante radiale de l'équation de mouvement s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{v}_R) + \frac{\partial}{\partial R}(\nu \overline{v_R^2}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\nu \overline{v_R v_\phi}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{v_R v_z}) + \nu \left(\frac{\overline{v_R^2} - \overline{v_\phi^2}}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = 0.$$

On peut l'écrire également sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_R}{\partial t} + \bar{v}_R \frac{\partial \bar{v}_R}{\partial R} + \frac{\bar{v}_\phi}{R} \frac{\partial \bar{v}_R}{\partial \phi} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_R}{\partial z} - \frac{\bar{v}_\phi^2}{R} + \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \frac{\sigma_{RR}^2 - \sigma_{\phi\phi}^2}{R} \\ + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial R}(\nu \sigma_{RR}^2) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\nu \sigma_{R\phi}^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \sigma_{Rz}^2) \right\} = 0. \end{aligned}$$

On procède de la même façon pour la composante azimutale, pour obtenir les deux formes suivantes de l'équation.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nu \bar{v}_\phi) + \frac{\partial}{\partial R}(\nu \overline{v_R v_\phi}) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\nu \overline{v_\phi^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{v_\phi v_z}) + \frac{2\nu \overline{v_R v_\phi}}{R} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial t} + \bar{v}_R \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial R} + \frac{\bar{v}_\phi}{R} \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial \phi} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\phi}{\partial z} + \frac{\bar{v}_R \bar{v}_\phi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + \frac{2\sigma_{R\phi}^2}{R} \\ + \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial R}(\nu \sigma_{R\phi}^2) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\nu \sigma_{\phi\phi}^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \sigma_{\phi z}^2) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Enfin, pour la troisième composante, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nu\bar{v}_z) + \frac{\partial}{\partial R}(\nu\bar{v}_z\bar{v}_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(\nu\bar{v}_z\bar{v}_\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu\bar{v}_z^2) + \frac{\nu\bar{v}_R\bar{v}_z}{R} + \nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_R\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial R} + \frac{\bar{v}_\phi}{R}\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\phi} + \bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial z} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\sigma_{Rz}^2}{R} + \frac{1}{\nu}\left\{\frac{\partial}{\partial R}(\nu\sigma_{Rz}^2) + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\phi}(\nu\sigma_{\phi z}^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu\sigma_{zz}^2)\right\} = 0.$$

On réécrira sans difficulté ces équations dans le cas d'une configuration stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) et à symétrie de révolution ($\partial/\partial\phi = 0$), comme la Galaxie. Abordons à présent quelques applications.

Le courant asymétrique

Compte tenu des symétries, la composante radiale de l'équation de mouvement, dans le plan de la Galaxie ($z = 0$), s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial R}(\nu\bar{v}_R^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu\bar{v}_R\bar{v}_z) + \nu\left(\frac{\bar{v}_R^2 - \bar{v}_\phi^2}{R} + \frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) = 0,$$

ou encore

$$\frac{2v_c v_a}{v_R^2} = \frac{\sigma_\phi^2}{v_R^2} - 1 - \frac{\partial\ln(\nu\bar{v}_R^2)}{\partial\ln R} - \frac{R}{v_R^2}\frac{\partial(\bar{v}_R\bar{v}_z)}{\partial z},$$

où $v_a = v_c - \bar{v}_\phi$ est le courant asymétrique et où on a fait l'approximation $v_c + \bar{v}_\phi \approx 2v_c$.

Nous avons déjà signalé que l'observation des galaxies extérieures suggère que, dans le disque, la forme de l'ellipsoïde des vitesses est relativement constante et que le carré de la dispersion des vitesses est proportionnel à la densité. Ces hypothèses permettent d'écrire

$$\frac{\partial\ln(\nu\bar{v}_R^2)}{\partial\ln R} \approx 2\frac{\partial\ln\nu}{\partial\ln R}.$$

Si on suppose que l'ellipsoïde des vitesses a ses axes parallèles aux vecteurs de la base cartésienne locale des coordonnées cylindriques, alors $\bar{v}_R\bar{v}_z = 0$. S'ils sont alignés sur les vecteurs de la base locale des coordonnées sphériques, alors $\bar{v}_R\bar{v}_z = (\bar{v}_R^2 - \bar{v}_z^2)\frac{z}{R}$ (voir exercice). Des intégrations numériques d'orbites montrent que la situation réelle est comprise entre ces deux extrêmes. On a donc

$$2\frac{v_c v_a}{v_R^2} \approx \frac{\sigma_\phi^2}{v_R^2} - 1 - 2\frac{\partial\ln\nu}{\partial\ln R} - \alpha\left(1 - \frac{\bar{v}_z^2}{v_R^2}\right),$$

avec α compris entre 0 et 1.

Exercices

1. Dans le cas où les axes de l'ellipsoïde des vitesses sont en tout point parallèles aux vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_ϕ de la base cartésienne locale des coordonnées sphériques, montrez qu'au voisinage du plan équatorial on a

$$\bar{v}_R\bar{v}_z \approx (\bar{v}_R^2 - \bar{v}_z^2)\frac{z}{R}.$$

Suggestion : écrire v_R et v_z en termes de v_r et v_θ .

2. À l'aide de la relation établie plus haut, évaluez le coefficient D dans la relation liant le courant asymétrique à la dispersion radiale des vitesses, $v_a \approx \bar{v}_R^2/D$.

Évaluation de la densité de masse

La troisième composante de l'équation de mouvement peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial R}(\nu \overline{v_z v_R}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{v_z^2}) + \frac{\nu \overline{v_R v_z}}{R} + \nu \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Les termes en $\overline{v_R v_z}$ peuvent être négligés par rapport aux termes en v_R^2 ou v_z^2 en faisant des hypothèses raisonnables sur l'ellipsoïde des vitesses (voir ci-dessus). Il reste donc l'équation

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial}{\partial z}(\nu \overline{v_z^2}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Tenant compte de l'équation de Poisson, qu'on peut écrire approximativement (système fortement aplati)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi G \rho,$$

il vient

$$4\pi G \rho = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\nu} \frac{\partial(\overline{\nu v_z^2})}{\partial z} \right].$$

Cette relation peut être utilisée pour estimer la densité totale de matière au voisinage du Soleil. Toutefois, la nécessité de dériver deux fois des données observationnelles rend cette estimation assez incertaine. C'est par cette méthode que Crézé et al. (1998) ont calculé ρ dans le voisinage solaire à partir des données d'Hipparcos.

15.2 Coordonnées sphériques

On peut écrire des équations d'hydrodynamique stellaire en coordonnées sphériques en procédant de la même façon que plus haut. Nous ne les écrirons toutefois que dans les hypothèses suivantes, qui présentent un grand intérêt pratique. Le système étudié sera stationnaire et possédera la symétrie sphérique (avec $\bar{v}_\theta = \bar{v}_\phi = 0$).

L'équation de continuité s'écrit

$$\frac{d}{dr}(\nu \bar{v}_r) + 2 \frac{\nu \bar{v}_r}{r} = 0.$$

Sa solution s'écrit

$$\nu \bar{v}_r = \frac{cte}{r^2}.$$

Pour éviter une singularité en $r = 0$, on doit annuler la constante et alors, $\bar{v}_r = 0$.

La composante radiale de l'équation de mouvement s'écrit

$$\frac{d}{dr}(\nu \overline{v_r^2}) + \nu \frac{d\Phi}{dr} + \frac{\nu}{r}(2\overline{v_r^2} - \overline{v_\theta^2} - \overline{v_\phi^2}) + \frac{\nu \overline{v_r v_\theta}}{r} \cotg \theta = 0.$$

Pour des raisons de symétrie, $\overline{v_r v_\theta} = 0$ et $\overline{v_\theta^2} = \overline{v_\phi^2}$. Il vient donc

$$\frac{1}{\nu} \frac{d}{dr}(\nu \overline{v_r^2}) + \frac{2\beta \overline{v_r^2}}{r} = -\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{Gm}{r^2},$$

où on a posé $\beta = 1 - (\overline{v_\theta^2}/\overline{v_r^2})$. L'équation ci-dessus exprime la masse $m(r)$ en termes des trois fonctions inconnues $\nu(r)$, $\overline{v_r^2}(r)$ et $\beta(r)$. Or l'observation d'une galaxie extérieure sphérique fournit deux fonctions : la brillance $I(R)$ et la dispersion des vitesses le long de la ligne de visée, $\sigma_p(R)$. Il est donc nécessaire de faire une hypothèse supplémentaire (par exemple $\beta = 0$ ou se donner le rapport masse/luminosité) si on veut en déduire un modèle de masse unique.

Références

Les articles de Kuijken et Gilmore (1989abc) constituent de très belles applications de l'équation de Boltzmann et de l'hydrodynamique stellaire à la détermination de la distribution de masse dans le voisinage solaire.

Crézé M., Chereul E., Bienaymé O., Pichon C., 1998. The distribution of nearby stars in phase space mapped by Hipparcos. I. The potential well and local dynamical mass. *Astron Astrophys*, 329, 920–936.

Kuijken K., Gilmore G., 1989a. The mass distribution in the galactic disc I. A technique to determine the integral surface mass density of the disc near the Sun. *MNRAS*, 239, 571–603.

Kuijken K., Gilmore G., 1989b. The mass distribution in the galactic disc II. Determination of the surface mass density of the disc near the Sun. *MNRAS*, 239, 605–649.

Kuijken K., Gilmore G., 1989c. The mass distribution in the galactic disc III. The local volume mass density. *MNRAS*, 239, 651–664.

Chapitre 16

Stabilité des systèmes sans collisions

L'étude de la stabilité d'un équilibre est d'une importance capitale car un état d'équilibre instable ne pourra généralement pas être observé dans la nature. Beaucoup de modèles de système stellaire en équilibre qu'on peut construire sont instables. Ainsi le modèle le plus simple de disque galactique, constitué d'étoiles se mouvant toutes sur des orbites circulaires (disque *froid*, pas de mouvements aléatoires) est violemment instable. L'analyse de stabilité peut déboucher sur des conclusions plus constructives que le simple rejet d'un modèle d'équilibre. Ainsi certains modèles de disque galactique, pourtant conformes aux données d'observation, présentent une violente instabilité qui se développe sous la forme d'une barre centrale. Comme un certain nombre de disques observés ne présentent pas cette structure, on en déduit qu'ils sont stabilisés par la présence d'une composante sphéroïdale massive, invisible. Une autre retombée des études de stabilité est l'explication (ou du moins une ébauche d'explication) des structures telles que les barres et les spirales ou le gauchissement du disque galactique. L'étude de la stabilité des systèmes stellaires est souvent très compliquée, aussi n'aborderons-nous que quelques problèmes.

16.1 L'instabilité de Jeans

Considérons un système stellaire homogène de dimension infinie. Comme dans le cas d'un fluide, un tel système est une fiction, mais l'analyse de stabilité qu'on peut en faire est instructive. La fonction de distribution pour le système non perturbé ne dépend que de la vitesse, $f_0 = f_0(\vec{v})$. Nous utiliserons l'indice 1 pour désigner une petite perturbation. L'évolution de cette perturbation satisfait aux équations de Boltzmann sans collisions et à l'équation de Poisson sous leur forme linéarisée.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} - \text{grad } \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0,$$

$$\Delta \Phi_1 = 4\pi G \int f_1 \vec{d}v.$$

Recherchons une solution sous la forme d'une onde plane $\propto \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$. Il vient

$$-i\omega f_1 + i\vec{k} \cdot \vec{v} f_1 - i\vec{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} \Phi_1 = 0,$$

$$-k^2\Phi_1 = 4\pi G \int f_1 \vec{d}\vec{v}.$$

Après quelques calculs, on obtient

$$1 + \frac{4\pi G}{k^2} \int \frac{\vec{k} \cdot (\partial f_0 / \partial \vec{v})}{\vec{k} \cdot \vec{v} - \omega} \vec{d}\vec{v} = 0.$$

Prenons des axes cartésiens tels que $z \parallel \vec{k}$ et pour f_0 une distribution maxwellienne,

$$f_0(\vec{v}) = \frac{\rho_0}{(2\pi)^{3/2}\sigma^3} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}.$$

On obtient aisément la relation de dispersion

$$1 - \frac{2\sqrt{2\pi}G\rho_0}{k\sigma^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_z e^{-\frac{v_z^2}{2\sigma^2}}}{kv_z - \omega} dv_z = 0.$$

Le cas de la stabilité marginale correspond à $\omega = 0$, ce qui donne une valeur critique k_J de k ,

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{\sigma}.$$

Toutes les perturbations de longueur d'onde $\lambda > \lambda_J = 2\pi/k_J = \sigma\sqrt{\pi/G\rho_0}$ sont instables et conduisent à la formation de condensations.

Exercices

1. Complétez l'analyse faite ci-dessus. Elle devrait préciser le sens de l'inégalité et montrer que ω est réel ou imaginaire pur (suggestion : voir l'article de Simon, 1961).
2. Retrouvez le critère de Jeans, de façon approchée, en comparant le temps caractéristique de l'effondrement gravitationnel d'une sphère de rayon R (temps dynamique) et le temps nécessaire à la dispersion d'une condensation sous l'effet de la dispersion des vitesses (voir Gilmore, King, Van der Kruit, 1989, pages 166 et suivantes).

16.2 Stabilité des systèmes sphériques

Considérons un système stellaire dont la fonction de distribution dépend seulement de l'énergie, nous la noterons $f_0(E)$, avec $E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi_0(r)$. L'équation de Boltzmann linéarisée s'écrit

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathcal{D}f_1 - \text{grad } \Phi_1 \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}} = 0,$$

où on a posé

$$\mathcal{D} = \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \text{grad } \Phi_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}}.$$

Φ_1 satisfait à l'équation de Poisson linéarisée

$$\Delta\Phi_1 = 4\pi G\rho_1$$

et est donné par l'expression intégrale

$$\Phi_1 = -G \int \frac{\rho'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' = -G \int \frac{f'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw',$$

où nous avons utilisé les notations $w = (\vec{r}, \vec{v})$, $dw = d\vec{r} d\vec{v}$. L'équation de Boltzmann peut s'écrire

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathcal{D}f_1 + G \frac{df_0}{dE} \vec{v} \cdot \text{grad} \int \frac{f'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw'.$$

Décomposons f_1 en une partie paire f_+ et une partie impaire f_- par rapport à la variable \vec{v} , $f_1 = f_+ + f_-$, avec

$$f_{\pm}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{2}[f(\vec{r}, \vec{v}, t) \pm f(\vec{r}, -\vec{v}, t)].$$

On notera que l'opérateur \mathcal{D} agissant sur une fonction paire produit une fonction impaire et inversement. En prenant les parties paire et impaire de l'équation ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_+}{\partial t} + \mathcal{D}f_- &= 0, \\ \frac{\partial f_-}{\partial t} + \mathcal{D}f_+ + G \frac{df_0}{dE} \vec{v} \cdot \text{grad} \int \frac{f'_+}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw' &= 0. \end{aligned}$$

On déduit une équation d'évolution pour f_- ,

$$\frac{\partial^2 f_-}{\partial t^2} = \mathcal{L}f_-,$$

avec

$$\mathcal{L}f_- = \mathcal{D}^2 f_- + G \frac{df_0}{dE} \vec{v} \cdot \text{grad} \int \frac{\mathcal{D}f'_-}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw'.$$

Poursuivons en faisant l'hypothèse $df_0/dE < 0$ et en définissant le produit scalaire

$$(f, g) = - \int \frac{f\bar{g}}{df_0/dE} dw.$$

Montrons que l'opérateur \mathcal{L} est symétrique.

$$(f, \mathcal{L}g) = - \int \frac{f\mathcal{D}^2\bar{g}}{df_0/dE} dw - G \int dw f\vec{v} \cdot \text{grad} \int \frac{\mathcal{D}\bar{g}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw'.$$

Soient A et B les deux termes du second membre, que nous allons transformer séparément. Notons d'abord que $\mathcal{D}E = 0$, cela permet d'écrire

$$A = - \int f \mathcal{D} \left(\frac{\mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} \right) dw = - \int f\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\frac{\mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} \right) dw + \int f \text{grad} \Phi_0 \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left(\frac{\mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} \right) dw.$$

On intègre par parties, il vient

$$A = \int \frac{\mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} dw - \int \frac{\mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} \text{grad} \Phi_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} dw = \int \frac{\mathcal{D}f \mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} dw.$$

Une intégration par parties permet d'écrire B sous la forme

$$B = G \int dw \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \int \frac{\mathcal{D}\bar{g}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw'.$$

En notant que

$$\int \text{grad } \Phi_0 \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} d\vec{v} = 0,$$

on peut encore écrire

$$B = G \iint \frac{\mathcal{D}f \mathcal{D}\bar{g}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw dw'.$$

On obtient finalement

$$(f, \mathcal{L}g) = \int \frac{\mathcal{D}f \mathcal{D}\bar{g}}{df_0/dE} dw + G \iint \frac{\mathcal{D}f \mathcal{D}\bar{g}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw dw'.$$

La symétrie de \mathcal{L} permet de déduire de l'équation d'évolution de f_- l'intégrale première

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_-}{\partial t}, \frac{\partial f_-}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} (f_-, \mathcal{L}f_-) = cte.$$

La perturbation ne peut pas croître exponentiellement si $-\mathcal{L}$ est défini positif. Dans ces conditions, le système considéré est stable.

Cette condition de stabilité peut être obtenue également en considérant les modes normaux dépendant du temps par un facteur exponentiel $\exp(st)$ où s est une constante complexe. La stabilité exige qu'aucun mode normal n'ait $\Re s > 0$. Cette façon de procéder suppose l'existence d'un ensemble complet de modes normaux, ce qui est difficile à justifier dans ce contexte (modes normaux singuliers).

Ce critère de stabilité peut être énoncé sous la forme du principe variationnel d'Antonov : un système stellaire sphérique dont la fonction de distribution $f_0(E)$ est telle que $df_0/dE < 0$ est stable si et seulement si pour toute fonction réelle $h(w)$

$$\int \frac{(\mathcal{D}h)^2}{|df_0/dE|} dw - G \iint \frac{\mathcal{D}h \mathcal{D}h'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw dw' \geq 0.$$

On montre alors, mais la démonstration est compliquée, que dans les hypothèses du principe d'Antonov, la stabilité est assurée.

Exercice

Montrez que

$$(f, \mathcal{L}f) = - \int \frac{|\mathcal{D}f|^2}{df_0/dE} dw - \frac{G}{4\pi} \int \vec{d}\vec{r} \left| \text{grad} \int \frac{\mathcal{D}f'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw' \right|^2.$$

Suggestion : posez

$$\hat{\rho} = \int \mathcal{D}f d\vec{v}$$

$$\hat{\Phi} = -G \int \frac{\hat{\rho}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}' = -G \int \frac{\mathcal{D}f'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw'.$$

On a donc

$$\Delta\hat{\Phi} = 4\pi G\hat{\rho}.$$

On transforme alors le terme de $(f, \mathcal{L}f)$ équivalent à B de la façon suivante.

$$\begin{aligned} B &= \int \hat{\rho}\hat{\Phi} \vec{dr} = \frac{1}{4\pi G} \int \hat{\Phi}\Delta\hat{\Phi} \vec{dr} = -\frac{1}{4\pi G} \int |\text{grad } \hat{\Phi}|^2 \vec{dr} \\ &= -\frac{G}{4\pi} \int \vec{dr} \left| \text{grad} \int \frac{\mathcal{D}f'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dw' \right|^2. \end{aligned}$$

16.3 La structure spirale

On doit à Lin et Shu l'hypothèse que les structures spirales observées dans les disques galactiques sont dues à des ondes de densité quasi stationnaires. La théorie de l'onde de densité est intimement liée à l'étude de la stabilité des disques stellaires en rotation différentielle.

Écrivons la densité dans le disque sous la forme

$$\Sigma(R, \phi, t) = \Sigma_0(R) + \Sigma_1(R, \phi, t),$$

où Σ_1 est une petite perturbation que nous écrivons

$$\Sigma_1(R, \phi, t) = H(R, t)e^{i[m\phi + f(R, t)]}.$$

m est le nombre de bras spiraux (souvent 2). La fonction $H(R, t)$ décrit l'amplitude de la perturbation spirale et varie lentement avec R et t . Un bras de spirale (figure 16.1) est décrit par l'équation

$$m\phi + f(R, t) = cte.$$

L'inclinaison i de la spirale par rapport aux orbites circulaire est d'environ 5° à 10° pour les spirales de type Sa, 10° à 15° pour les Sb et 15° à 20° pour les Sc. L'inclinaison i de la spirale au point P est donnée par

$$\cotg i = R \left| \frac{\partial \phi}{\partial R} \right| = \frac{R}{m} \left| \frac{\partial f}{\partial R} \right| = \left| \frac{kR}{m} \right|,$$

où k est le nombre d'onde radial, défini par

$$k(R, t) = \frac{\partial f(R, t)}{\partial R}.$$

On voit aisément que $k > 0$ pour une spirale de type *trailing* et $k < 0$ pour le type *leading*.

L'étude des perturbations spirales peut être abordée par des méthodes analytiques au prix de quelques approximations. On considérera des spirales serrées, c'est-à-dire telles que la longueur d'onde radiale $\lambda \ll R$ ou $kR \gg 1$.

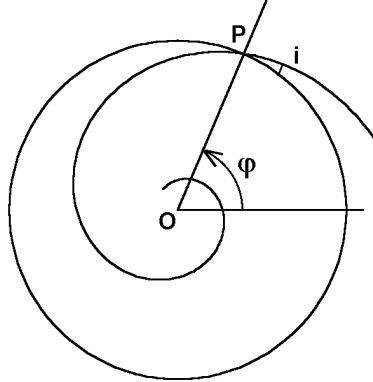


FIG. 16.1 – Un bras de spirale.

Évaluons la perturbation de potentiel résultant de la perturbation de densité. Comme la perturbation de densité oscille rapidement (spatialement) autour d'une valeur moyenne nulle, les contributions venant des zones distantes se compensent et le potentiel en un point est déterminé seulement par la perturbation de densité au voisinage de ce point (quelques longueurs d'onde). On peut donc approximer la perturbation de densité par une onde plane. La perturbation de potentiel dans le plan $z = 0$ est alors donnée par (voir exercice)

$$\Phi_1 \approx -\frac{2\pi G \Sigma_1}{|k|} = -\frac{2\pi GH}{|k|} e^{i(m\phi + f)}.$$

Étudions la réponse du disque gazeux à cette perturbation de potentiel. Nous négligeons l'épaisseur du disque et nous supposons que le gaz obéit à une relation barotropique de la forme $P = P(\Sigma)$. Ses mouvements obéissent à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma v_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Sigma v_\phi) = 0,$$

et à l'équation de mouvement dont les deux composantes s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{R} &= -\frac{\partial}{\partial R} (\Phi + h), \\ \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\phi}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_R v_\phi}{R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} (\Phi + h), \end{aligned}$$

où h est l'enthalpie spécifique.¹ On notera que la vitesse du son est donné par $c^2 = dh/d\Sigma$.

¹Lorsque la pression peut s'exprimer en termes de la densité seulement (relation barotropique), on peut écrire

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } P = \text{grad } h,$$

où

$$h = \int \frac{dP}{\rho}$$

Le mouvement non perturbé obéit à l'équation

$$-\frac{v_{\phi 0}^2}{R} = -\frac{d}{dR}(\Phi_0 + h_0).$$

Dans cette expression, le terme en h_0 joue un rôle négligeable et on peut écrire

$$v_{\phi 0} \approx \sqrt{R \frac{d\Phi_0}{dR}} = R\Omega.$$

Les grandeurs perturbées obéissent aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R \Sigma_0 v_{R1}) + \frac{\Sigma_0}{R} \frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial \phi} + \Omega \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \phi} &= 0, \\ \frac{\partial v_{R1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{R1}}{\partial \phi} - 2\Omega v_{\phi 1} &= -\frac{\partial}{\partial R}(\Phi_1 + h_1), \\ \frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_{\phi 1}}{\partial \phi} - 2B v_{R1} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \phi}(\Phi_1 + h_1), \end{aligned}$$

où

$$B = -\frac{1}{2} R \frac{d\Omega}{dR} - \Omega.$$

Rappelons que la fréquence épicyclique κ est donnée par

$$\kappa^2 = -4B\Omega.$$

Recherchons les solutions dépendant des variables par un facteur exponentiel $\exp[i(kR + m\phi - \sigma t)]$. Les équations de mouvement donnent

$$\begin{aligned} (-i\sigma + im\Omega)v_{R1} - 2\Omega v_{\phi 1} &= -ik(\Phi_1 + h_1), \\ -2B v_{R1} + (-i\sigma + im\Omega)v_{\phi 1} &= -\frac{im}{R}(\Phi_1 + h_1). \end{aligned}$$

En posant

$$\Delta = \kappa^2 - (m\Omega - \sigma)^2,$$

il vient

$$\begin{aligned} v_{R1} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ k(m\Omega - \sigma) - \frac{2im\Omega}{R} \right\} (\Phi_1 + h_1) \approx \frac{k(m\Omega - \sigma)}{\Delta} (\Phi_1 + h_1), \\ v_{\phi 1} &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{m}{R}(m\Omega - \sigma) - 2iBk \right\} (\Phi_1 + h_1) \approx -\frac{2iBk}{\Delta} (\Phi_1 + h_1). \end{aligned}$$

On notera les singularités aux résonances de Linblad. Leur présence indique que le traitement linéaire adopté ici est inadéquat au voisinage de ces résonances.

En ne gardant que les termes dominants de l'équation de continuité, il vient

$$(-i\sigma + im\Omega)\Sigma_1 + ik\Sigma_0 v_{R1} = 0.$$

est l'enthalpie spécifique. Un exemple bien connu de fluide barotrope est celui d'un fluide subissant une transformation adiabatique. Dans ce cas, l'enthalpie définie ici est bien la même que celle qui est définie en thermodynamique.

En notant que $h_1 = c^2 \Sigma_1 / \Sigma_0$, il vient la relation de dispersion

$$(m\Omega - \sigma)^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma_0 |k| + k^2 c^2.$$

Cette relation peut être utilisée pour écrire une condition de stabilité locale d'un disque gazeux vis-à-vis de perturbations axisymétriques ($m = 0$). On obtient aisément la condition

$$Q = \frac{\kappa c}{\pi G \Sigma} > 1.$$

Dans le cas d'un disque stellaire, le calcul de la relation de dispersion, à partir des équations de l'hydrodynamique stellaire, suit les mêmes lignes générales que ci-dessus. Toutefois le calcul de \bar{v}_{R1} est plus compliqué. Dans le cas d'un disque froid (toutes les étoiles en orbites circulaires), on obtient simplement

$$\bar{v}_{R1} = \frac{k(m\Omega - \sigma)}{\Delta} \Phi_1.$$

Mais si la dispersion des vitesses n'est pas nulle, les étoiles se trouvant en un point donné ont échantillonné le potentiel gravifique dans un certain voisinage et la réponse à la perturbation du potentiel est réduite,

$$\bar{v}_{R1} = \frac{\mathcal{F} k(m\Omega - \sigma)}{\Delta} \Phi_1,$$

où \mathcal{F} est un facteur inférieur à l'unité. Nous n'en ferons pas le calcul. On obtient la relation de dispersion

$$(m\Omega - \sigma)^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma_0 |k| \mathcal{F}.$$

La condition de stabilité locale d'un disque stellaire vis-à-vis d'une perturbation axisymétrique s'écrit

$$Q = \frac{\sigma_R \kappa}{3,36 G \Sigma} > 1.$$

On notera l'analogie avec le critère correspondant pour un disque gazeux. Les deux critères sont connus sous le nom de critères de stabilité de Toomre.

Évaluons Q dans le voisinage solaire. Avec $\Sigma \approx 40 \text{ M}_\odot \text{ pc}^{-2}$, $\kappa \approx 36 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, $\sigma_R \approx 40 \text{ km s}^{-1}$, on obtient $Q \approx 2,5$. La validité de ces résultats dans le voisinage solaire est toutefois sérieusement mise en doute par le fait qu'on est à la limite, si pas au dehors, du domaine de validité des approximations faites. Ainsi, si $Q = 1$, la stabilité devient marginale pour une longueur d'onde $\lambda \approx 6 \text{ kpc}$, qu'on ne peut certainement pas considérer comme petite vis-à-vis de $R_0 = 8,5 \text{ kpc}$.

Exercice

Calculez la perturbation de potentiel Φ_1 résultant d'une perturbation de densité superficielle d'un disque (dans le plan $z = 0$) en forme d'onde plane $\Sigma_1 \exp(ikx)$

Réponse : $\Phi_1 \exp(ikx - |k|z)$ avec $\Phi_1 = 2\pi G \Sigma_1 / |k|$.

Références

C'est pour une masse gazeuse que Jeans a établi son critère d'instabilité gravitationnelle. Une démonstration reposant sur l'équation de Boltzmann sans collisions a été donnée par Simon (1961). Pour des informations complémentaires sur la stabilité des systèmes sphériques, on se reportera aux articles de Lynden-Bell et Sanitt (1969), Kulsrud et Mark (1970) et Kandrup et Sygnet (1985).

Gilmore G., King I., Van der Kruit P., 1989. The Milky Way as a galaxy, 19th advanced course of the Swiss Society of Astrophysics and Astronomy. Geneva Observatory.

Jeans J.H., 1928. Astronomy and cosmogony. Cambridge University Press.

Kandrup H.E., Sygnet J.F., 1985. A simple proof of dynamical stability for a class of spherical clusters. *Astrophys J*, 298, 27–33.

Kulsrud R.M., Mark J.W.-K., 1970. Collective instabilities and waves for inhomogeneous stellar systems. I. The necessary and sufficient energy principle. *Astrophys J*, 160, 471–483.

Lynden-Bell D., Sanitt N., 1969. The Schrödinger operator criterion for the stability of galaxies and gas spheres. *Month Not Roy Astron Soc*, 143, 167–187.

Simon R., 1961. Sur l'instabilité gravitationnelle. *Bull Acad Roy Belg, classe des sciences*, 5e série, 47, 731–738.

Annexe A

Constantes et relations utiles

A.1 Constantes

Constante de la gravitation	$G = 6,673 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$
Vitesse de la lumière	$c = 2,99792458 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$
Unité astronomique	$1,49597871 \cdot 10^{13} \text{ cm}$
Parsec	$\text{pc} = 3,085678 \cdot 10^{18} \text{ cm}$
Année tropique	$3,155692598 \cdot 10^7 \text{ s}$
Masse solaire	$M_{\odot} = 1,9889 \cdot 10^{33} \text{ g}$
Luminosité solaire	$L_{\odot} = 3,844 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$

$1 \text{ km s}^{-1} \approx 1,023 \text{ pc}$ par million d'années

$M_{\odot}/L_{\odot} \approx 0,52 \text{ CGS}$

$1 \text{ radian} \approx 206265''$

A.2 Les coordonnées cylindriques

Rappelons les relations entre coordonnées cylindriques et coordonnées cartésiennes :

$$x = R \cos \phi,$$

$$y = R \sin \phi.$$

$$\vec{e}_R = \cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_{\phi} = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y.$$

Nous utiliserons la base cartésienne locale $\vec{e}_R, \vec{e}_{\phi}, \vec{e}_z$. Notons les expressions différentielles de ces vecteurs :

$$d\vec{e}_R = \vec{e}_{\phi} d\phi,$$

$$d\vec{e}_{\phi} = -\vec{e}_R d\phi.$$

Les expressions des opérateurs différentiels appliqués aux coordonnées ou aux vecteurs de base se déduisent aisément des relations précédentes.

$$\begin{aligned} \text{grad } R &= \vec{e}_R, & \text{div } \vec{e}_R &= \frac{1}{R}, & \text{rot } \vec{e}_r &= 0, \\ \text{grad } \phi &= \frac{1}{R} \vec{e}_\phi, & \text{div } \vec{e}_\phi &= 0, & \text{rot } \vec{e}_\phi &= \frac{1}{R} \vec{e}_z, \\ \text{grad } z &= \vec{e}_z, & \text{div } \vec{e}_z &= 0, & \text{rot } \vec{e}_z &= 0. \end{aligned}$$

Soit α un champ scalaire et \vec{a} un champ vectoriel. Nous écrivons \vec{a} sous la forme

$$\vec{a} = a_R \vec{e}_R + a_\phi \vec{e}_\phi + a_z \vec{e}_z.$$

On obtient aisément

$$\begin{aligned} \text{grad } \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \vec{e}_\phi + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \vec{e}_z, \\ \text{div } \vec{a} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R a_R) + \frac{1}{R} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{1}{R} \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right) \vec{e}_R + \left(\frac{\partial a_R}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial R} \right) \vec{e}_\phi + \left(\frac{\partial a_\phi}{\partial R} - \frac{1}{R} \frac{\partial a_R}{\partial \phi} + \frac{a_\phi}{R} \right) \vec{e}_z, \\ \Delta \alpha &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \alpha}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Explicitons quelques étapes du changement de variables $(x, y, v_x, v_y) \mapsto (R, \phi, v_R, v_\phi)$, en ignorant la partie triviale de la transformation $(z, v_z) \mapsto (z, v_z)$. On a les relations suivantes entre les composantes de la vitesse.

$$\begin{aligned} v_x &= v_R \cos \phi - v_\phi \sin \phi, \\ v_y &= v_R \sin \phi + v_\phi \cos \phi. \end{aligned}$$

La matrice jacobienne de la transformation s'écrit

$$\frac{\partial(x, y, v_x, v_y)}{\partial(R, \phi, v_R, v_\phi)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -R \sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & R \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & -v_R \sin \phi - v_\phi \cos \phi & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & v_R \cos \phi - v_\phi \sin \phi & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la jacobienne inverse

$$\frac{\partial(R, \phi, v_R, v_\phi)}{\partial(x, y, v_x, v_y)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{R} & \frac{\cos \phi}{R} & 0 & 0 \\ -\frac{v_\phi \sin \phi}{R} & \frac{v_\phi \cos \phi}{R} & \cos \phi & \sin \phi \\ \frac{v_R \sin \phi}{R} & -\frac{v_R \cos \phi}{R} & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

On écrit alors aisément

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin \phi}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{v_\phi \sin \phi}{R} \frac{\partial}{\partial v_R} + \frac{v_R \sin \phi}{R} \frac{\partial}{\partial v_\phi}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\cos \phi}{R} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v_\phi \cos \phi}{R} \frac{\partial}{\partial v_R} - \frac{v_R \cos \phi}{R} \frac{\partial}{\partial v_\phi}, \\ \frac{\partial}{\partial v_x} &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial v_R} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial v_\phi}, \\ \frac{\partial}{\partial v_y} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial v_R} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial v_\phi}.\end{aligned}$$

A.3 Les coordonnées sphériques

Rappelons les relations entre coordonnées sphériques et coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\phi &= -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Nous utiliserons la base cartésienne locale $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$. Notons les expressions différentielles de ces vecteurs :

$$\begin{aligned}d\vec{e}_r &= \vec{e}_\theta d\theta + \sin \theta \vec{e}_\phi d\phi, \\ d\vec{e}_\theta &= -\vec{e}_r d\theta + \cos \theta \vec{e}_\phi d\phi, \\ d\vec{e}_\phi &= -(\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta) d\phi.\end{aligned}$$

Les expressions des opérateurs différentiels appliqués aux coordonnées ou aux vecteurs de base se déduisent aisément des relations précédentes.

$$\begin{aligned}\text{grad } r &= \vec{e}_r, & \text{div } \vec{e}_r &= \frac{2}{r}, & \text{rot } \vec{e}_r &= 0, \\ \text{grad } \theta &= \frac{1}{r} \vec{e}_\theta, & \text{div } \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \cotg \theta, & \text{rot } \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \vec{e}_\phi, \\ \text{grad } \phi &= \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi, & \text{div } \vec{e}_\phi &= 0, & \text{rot } \vec{e}_\phi &= \frac{1}{r} \cotg \theta \vec{e}_r - \frac{1}{r} \vec{e}_\theta.\end{aligned}$$

Soit α un champ scalaire et \vec{a} un champ vectoriel. Nous écrirons \vec{a} sous la forme

$$\vec{a} = a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta + a_\phi \vec{e}_\phi.$$

On obtient aisément

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} \alpha &= \frac{\partial \alpha}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi}, \\ \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}, \\ \operatorname{rot} \vec{a} &= \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right] \vec{e}_\theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\phi, \\ \Delta \alpha &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \phi^2}.\end{aligned}$$

Nous poserons

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

où on reconnaît l'opérateur carré du moment cinétique utilisé en mécanique quantique. C'est, en quelque sorte, la partie angulaire du laplacien (on l'appelle parfois legendrien).

$$\Delta \alpha = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} L^2 \alpha.$$

Rappelons que les fonctions sphériques $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sont les fonctions propres de L^2 :

$$L^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \ell(\ell + 1) Y_{lm}(\theta, \phi).$$

Explicitons quelque peu le changement de variables $(x, y, z, v_x, v_y, v_z) \mapsto (r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi)$. On a les relations suivantes entre les composantes de la vitesse.

$$\begin{aligned}v_x &= v_r \sin \theta \cos \phi + v_\theta \cos \theta \cos \phi - v_\phi \sin \phi, \\ v_y &= v_r \sin \theta \sin \phi + v_\theta \cos \theta \sin \phi + v_\phi \cos \phi, \\ v_z &= v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta.\end{aligned}$$

La matrice jacobienne s'écrit

$$\frac{\partial(x, y, z, v_x, v_y, v_z)}{\partial(r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_r \cos \theta \cos \phi - v_\theta \sin \theta \cos \phi & -v_r \sin \theta \sin \phi - v_\theta \cos \theta \sin \phi - v_\phi \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & v_r \cos \theta \sin \phi - v_\theta \sin \theta \sin \phi & v_r \sin \theta \cos \phi + v_\theta \cos \theta \cos \phi - v_\phi \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & -v_r \sin \theta - v_\theta \cos \theta & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule la jacobienne inverse

$$\frac{\partial(r, \theta, \phi, v_r, v_\theta, v_\phi)}{\partial(x, y, z, v_x, v_y, v_z)} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \phi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \phi & -\frac{1}{r} \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v_\theta}{r} \cos \theta \cos \phi - \frac{v_\phi}{r} \sin \phi & \frac{v_\theta}{r} \cos \theta \sin \phi + \frac{v_\phi}{r} \cos \phi & -\frac{v_\theta}{r} \sin \theta & \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ -\frac{v_r}{r} \cos \theta \cos \phi & -\frac{v_r}{r} \cos \theta \sin \phi & \frac{v_r}{r} \sin \theta & \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\frac{v_\phi}{r} \cotg \theta \sin \phi & +\frac{v_\phi}{r} \cotg \theta \cos \phi & & & & \\ \frac{v_r}{r} \sin \phi & -\frac{v_r}{r} \cos \phi & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ +\frac{v_\theta}{r} \cotg \theta \sin \phi & -\frac{v_\theta}{r} \cotg \theta \cos \phi & & & & \end{pmatrix} .$$